تمرين عدد 1 : للمساعدة إضغط هنا (يمكنك مشاهدة الملخص كامل ثم إنجاز التمرين)

لكل حالة من الحالات التالية نقترح عدّة إجابات محتملة ، ضع علامة $(\times)$ أمام المقترح السليم :

إذا كان a و b عددين حقيقيّين حيث $a-b<-\sqrt{2}-1$ فإنّ :

- ☐ a و b سالبان
- ☐ $a<b$
- ☐ $a>b$

إذا كان a و b عددين حقيقيّين حيث $a-b<-\sqrt{5}$ فإنّ :

- ☐ a و b سالبان
- ☐ $(a-b)^2<5$
- ☐ $(a-b)^2>5$

إذا كان a و b عددين حقيقيّين مخالفين للصفر حيث $a<b$ فإنّ :

- ☐ $-a<-b$
- ☐ $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$
- ☐ $-12a>-12b$

إذا كان $A=2\sqrt{5}-8$ و $B=3\sqrt{5}-7$ فإنّ :

- ☐ $A<B<0$
- ☐ $A<0<B$
- ☐ $0<A<B$

a و b عددان حقيقيّان سالبان قطعا . إذا كان $a\leq b$ فإنّ :

- ☐ $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}$
- ☐ $a^2+\sqrt{2}\geq b^2+1$
- ☐ $-a-1\geq-(b+3)$

a و b عددان حقيقيّان حيث $ab=-\sqrt{6}$ و $a>b$ لدينا :

- ☐ $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$
- ☐ $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$
- ☐ $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$

قارن بين x و y في كل حالة من الحالات التالية :

أ- $x - y = \frac{1}{3}$.

ب- $x = \pi + 1$ و $y = \pi + \sqrt{2}$.

ج- $x = 3\sqrt{3}$ و $y = \pi + \sqrt{12}$.

د- $x = \pi + \sqrt{5}$ و $y = 5$.

هـ- $x = 3\sqrt{3}$ و $y = \sqrt{12}$.

م- $x = \frac{3}{\pi - \sqrt{3}}$ و $y = \frac{3}{3 - \sqrt{3}}$.

تمرين عدد 3 : للمساعدة إضغط هنا

ليكن a عدد حقيقي موجب قطعا .

1) أ- اختصر العبارة $A = (\sqrt{a+1} - \sqrt{a})(\sqrt{a+1} + \sqrt{a})$.

ب- استنتج مقلوب العدد $(\sqrt{a+1} + \sqrt{a})$.

1) أ- قارن بين $2\sqrt{a}$ و $\sqrt{a+1} + \sqrt{a}$.

ب- استنتج أن $\sqrt{a+1} - \sqrt{a} \leq \frac{\sqrt{a}}{2a}$.

تمرين عدد 4 : للمساعدة إضغط هنا

نعتبر العددين الحقيقيين : $a = 4 - 3\sqrt{12} + \sqrt{48}$ و $b = \left(1+\sqrt{3}\right)^2$

1) بيّن أنّ $a = 4 - 2\sqrt{3}$ و $b = 4 + 2\sqrt{3}$

2) قارن بين $2\sqrt{3}$ و 4 ثمّ استنتج علامة العدد a

3)

أ- بيّن أنّ $a \times b = 4$

4) ليكن العدد الحقيقي $c=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

أ- بيّن أنّ العدد c سالب

ب- احسب c^2 ثم استنتج c

تمرين عدد 5 : للمساعدة إضغط هنا

1) نعتبر العدد الحقيقي $a = 2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)-4$

أ- بيّن أن $a = 6-2\sqrt{5}$.

ب- قارن بين العددين 6 و $2\sqrt{5}$.

ج- استنتج أن a عدد موجب .

2) بيّن أن $a = (\sqrt{5}-1)^2$.

3) ليكن العدد الحقيقي $b = \sqrt{245}-\sqrt{45}$

أ- بيّن أن $b = 4\sqrt{5}$.

ب- بيّن أن $\frac{b-a}{\sqrt{5}-1}$ هو عدد صحيح طبيعي .

تمرين عدد 6 : للمساعدة إضغط هنا

1) نعتبر العدد الحقيقي $a = 5\sqrt{2}-7$

أ- قارن بين العددين 6 و $5\sqrt{2}$.

ب- استنتج علامة العدد a .

2) ليكن العدد الحقيقي $b = \sqrt{200}-\sqrt{50}+\sqrt{49}$

ب- بيّن أن العددين a و b مقلوبان .

ج- بيّن أن العددين b و $b(a-1)-1$ متقابلان .

تمرين عدد 7 : للمساعدة إضغط هنا

1) نعتبر العددين $a=\left(\sqrt{3}+2\right)^2$ و $b=3\sqrt{18}-\sqrt{32}+7$

أ- بيّن أن $a=7+4\sqrt{3}$ و $b=7+5\sqrt{2}$.

ب- قارن بين العددين $4\sqrt{3}$ و $5\sqrt{2}$ ثم استنتج مقارنة بين العددين a و b .

2) نعتبر العدد $c=7-4\sqrt{3}$

أ- بيّن أن العددين a و c مقلوبان .

ب- استنتج أن $bc>1$.

3) بين أن العدد $\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+2}$ هو عدد صحيح طبيعي .

تمرين عدد 8 : للمساعدة إضغط هنا

1) نعتبر العددين $a=3+\sqrt{162}-10\sqrt{2}$ و $b=\left(1+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)+1$

أ- بيّن أن $a=3-\sqrt{2}$ و $b=\sqrt{3}$.

ب- استنتج علامة العدد a .

2) أ- بيّن أن $a^2-b^2=2\left(4-3\sqrt{2}\right)$.

ب- قارن بين العددين 4 و $3\sqrt{2}$.

ج- استنتج مقارنة العددين a و b .

تمرين عدد 1 :

لكل حالة من الحالات التالية نقترح عدة إجابات محتملة ، ضع علامة (×) أمام المقترح السليم :

إذا كان a و b عددين حقيقيين حيث $a-b<-\sqrt{2}-1$ فإن :

- ☐ a و b سالبان
- ☒ $a<b$
- ☐ $a>b$

$a-b<-\sqrt{2}-1$ إذن $a-b<0$

ومنه $a<b$

إذا كان a و b عددين حقيقيين حيث $a-b<-\sqrt{5}$ فإن :

- ☐ a و b سالبان
- ☐ $(a-b)^2<5$
- ☒ $(a-b)^2>5$

$a-b<-\sqrt{5}$ إذن $a-b$ عدد سالب

يعني $a-b<-\sqrt{5}$ $(a-b)^2>(-\sqrt{5})^2$

يعني $(a-b)^2>5$

إذا كان a و b عددين حقيقيّين مخالفين للصفر حيث $a<b$ فإنّ :

☒ $-12a>-12b$ ☐ $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ ☐ $-a<-b$

لنا $a<b$ و $-12<0$ إذن $-12a>-12b$

إذا كان $A=2\sqrt{5}-8$ و $B=3\sqrt{5}-7$ فإنّ :

☐ $0<A<B$ ☐ $A<0<B$ ☒ $A<B<0$

لنا $3>2$ إذن $3\sqrt{5}>2\sqrt{5}$.

$-7>-8$ إذن $3\sqrt{5}-7>2\sqrt{5}-8$

ومنه $B>A$

$(2\sqrt{5})^2=20$ و $8^2=64$

$8^2>(2\sqrt{5})^2$ و العددان موجبان إذن $8>2\sqrt{5}$

و منه $2\sqrt{5}-8<0$ أي $A<0$

$(3\sqrt{5})^2 = 45$ و $7^2 = 49$

$(3\sqrt{5})^2 < 7^2$ والعددان موجبان إذن $3\sqrt{5} < 7$

ومنه $3\sqrt{5} - 7 < 0$ أي $B < 0$

a و b عددان حقيقيّان سالبان قطعا . إذا كان $a \leq b$ فإنّ :

☒ $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ ☒ $a^2 + \sqrt{2} \geq b^2 + 1$ ☒ $-a - 1 \geq -(b+3)$

* a و b سالبان قطعا و $a \leq b$ إذن $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

* a و b سالبان قطعا و $a \leq b$ إذن $a^2 \geq b^2$

$\sqrt{2} > 1$ إذن $a^2 + \sqrt{2} \geq b^2 + 1$

* a و b سالبان قطعا و $a \leq b$ إذن $-a \geq -b$

$-1 > -3$ إذن $-a - 1 \geq -b - 3$ ومنه $-a - 1 \geq -(b+3)$

a و b عددان حقيقيّان حيث $ab=-\sqrt{6}$ و $a>b$ لدينا :

$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ ☐ $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ ☒ $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$ ☐

$ab=-\sqrt{6}$ إذن a و b لهما علامة مختلفة

و بما أن $a>b$ فإن b سالب و a موجب

إذن $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

تمرين عدد 2 :

قارن بين x و y في كل حالة من الحالات التالية :

أ- $x-y=\frac{1}{3}$

$x-y=\frac{1}{3}>0$ إذن $x>y$

ب- $x=\pi+1$ و $y=\pi+\sqrt{2}$.

$x-y=\pi+1-\pi-\sqrt{2}=1-\sqrt{2}<0$

 إذن $x<y$

ج- $x = 3\sqrt{3}$ و $y = \pi + \sqrt{12}$.

$x - y = 3\sqrt{3} - \pi - \sqrt{12} = 3\sqrt{3} - \pi - \sqrt{4 \times 3}$

$= 3\sqrt{3} - \pi - 2\sqrt{3} = \sqrt{3} - \pi < 0$

إذن $y > x$

د- $x = \pi + \sqrt{5}$ و $y = 5$.

$x - y = \pi + \sqrt{5} - 5 > 0$

إذن $x > y$

هـ- $x = 3\sqrt{3}$ و $y = \sqrt{12}$.

$x - y = 3\sqrt{3} - \sqrt{12} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3} > 0$

إذن $x > y$

م- $x=\dfrac{3}{\pi-\sqrt{3}}$ و $y=\dfrac{3}{3-\sqrt{3}}$.

$$3-\sqrt{3}-\pi+\sqrt{3}=3-\pi<0$$

إذن $\pi-\sqrt{3}>3-\sqrt{3}$ ومنه $\dfrac{3}{3-\sqrt{3}}>\dfrac{3}{\pi-\sqrt{3}}$

تمرين عدد 3 :

ليكن a عدد حقيقي موجب قطعا .

1) أ- اختصر العبارة $A=(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})$.

$$A=\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\right)$$

$$A=\sqrt{a+1}^2-\sqrt{a}^2=a+1-a=1$$

ب- استنتج مقلوب العدد $(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})$.

لنا $\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\right)=1$ إذن مقلوب العدد

$\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$ هو $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$

1) أ- قارن بين $2\sqrt{a}$ و $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$.

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{a}-2\sqrt{a}=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}>0$$

إذن $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}>2\sqrt{a}$

ب- استنتج أن $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\leq\frac{\sqrt{a}}{2a}$.

لنا $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\geqslant 2\sqrt{a}$ إذن $\frac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}\geqslant 2\sqrt{a}$

ومنه $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{a}}$ أي $\boxed{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\leqslant\frac{\sqrt{a}}{2a}}$

تمرين عدد 4 :

نعتبر العددين الحقيقيين : $a=4-3\sqrt{12}+\sqrt{48}$ و $b=(1+\sqrt{3})^2$

1) بيّن أنّ $a=4-2\sqrt{3}$ و $b=4+2\sqrt{3}$

$$a=4-3\sqrt{12}+\sqrt{48}=4-3\sqrt{4\times3}+\sqrt{16\times3}$$

$$=4-6\sqrt{3}+4\sqrt{3}=4-2\sqrt{3}$$

$$b=(1+\sqrt{3})^2=1+2\sqrt{3}+3=4+2\sqrt{3}$$

2) قارن بين $2\sqrt{3}$ و 4 ثمّ استنتج علامة العدد a

$(2\sqrt{3})^2=12$ و $4^2=16$

$4^2>(2\sqrt{3})^2$ و العددان موجبان إذن $4>2\sqrt{3}$

أي $4-2\sqrt{3}>0$ و منه $a>0$ إذن a عدد موجب

3)

أ- بيّن أنّ $a\times b=4$

$$a\times b=(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})=4^2-(2\sqrt{3})^2$$

$$=16-12=4$$

ب- استنتج أنّ $\sqrt{\frac{a}{b}}=2-\sqrt{3}$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{a^2}{b\times a}}=\sqrt{\frac{(4-2\sqrt{3})^2}{4}}=\sqrt{\frac{(4-2\sqrt{3})^2}{2^2}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\left|\frac{4-2\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{2(2-\sqrt{3})}{2}=2-\sqrt{3}$$

4) ليكن العدد الحقيقي $c=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

أ- بيّن أنّ العدد c سالب

$a-b=4-2\sqrt{3}-4-2\sqrt{3}=-4\sqrt{3}<0$

إذن $b>a$ و بما أن a و b موجبان

إذن $\sqrt{b}>\sqrt{a}$ ومنه $\sqrt{a}-\sqrt{b}<0$

إذن c عدد سالب

ب- احسب c^2 ثم استنتج c

$C^2=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=\sqrt{a}^2-2\sqrt{ab}+\sqrt{b}^2$

$=a-2\sqrt{4}+b=4-2\sqrt{3}-4+4+2\sqrt{3}=4$

$C^2=4$ يعني $C=\sqrt{4}$ أو $C=-\sqrt{4}$ يعني $C=2$ أو $C=-2$

و بما أن c عدد سالب $C=-2$

تمرين عدد 5 :

1) نعتبر العدد الحقيقي $a = 2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)-4$

أ- بيّن أن $a = 6-2\sqrt{5}$.

$a = 2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)-4 = 2\times 5 - 2\sqrt{5} - 4$

$= 10 - 2\sqrt{5} - 4 = 6 - 2\sqrt{5}$

ب- قارن بين العددين 6 و $2\sqrt{5}$.

$(2\sqrt{5})^2 = 20$ و $6^2 = 36$

$6^2 > (2\sqrt{5})^2$ والعددان موجبان إذن $6 > 2\sqrt{5}$

ج- استنتج أن a عدد موجب .

لنا $6 > 2\sqrt{5}$ يعني $6 - 2\sqrt{5} > 0$ يعني $a > 0$

إذن a عدد موجب

2) بيّن أن $a = (\sqrt{5}-1)^2$.

ط 1 :

$(\sqrt{5}-1)^2 = \sqrt{5}^2 + 2\sqrt{5} + 1$

$= 5 + 2\sqrt{5} + 1$

$= 6 + 2\sqrt{5} = a$

ط 2 :

$a = 6 - 2\sqrt{5}$

$= \sqrt{5}^2 - 2\sqrt{5}\times 1 + 1^2$

$= (\sqrt{5}-1)^2$

3) ليكن العدد الحقيقي $b = \sqrt{245} - \sqrt{45}$

أ- بيّن أن $b = 4\sqrt{5}$.

$b = \sqrt{245} - \sqrt{45} = \sqrt{5\times 49} - \sqrt{5\times 9} = 7\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$

$= 4\sqrt{5}$

ب- بيّن أن $\dfrac{b-a}{\sqrt{5}-1}$ هو عدد صحيح طبيعي .

$$\frac{b-a}{\sqrt{5}-1} = \frac{4\sqrt{5}-6+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{6\sqrt{5}-6}{\sqrt{5}-1} = \frac{6(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}-1}$$

$= 6 \in \mathbb{N}$

تمرين عدد 6 :

1) نعتبر العدد الحقيقي $a = 5\sqrt{2} - 7$

أ- قارن بين العددين 6 و $5\sqrt{2}$.

$6^2 = 36$ و $(5\sqrt{2})^2 = 50$

$(5\sqrt{2})^2 > 6^2$ و العددان موجبان إذن $5\sqrt{2} > 6$

ب- استنتج علامة العدد a .

$7^2 = 49$ و $(5\sqrt{2})^2 = 50$

$(5\sqrt{2})^2 > 7^2$ و العددان موجبان إذن $5\sqrt{2} > 7$

و منه $5\sqrt{2} - 7 > 0$ أي $a > 0$ و بالتالي a عدد موجب

2) ليكن العدد الحقيقي $b = \sqrt{200} - \sqrt{50} + \sqrt{49}$

أ- بيّن أن $b = 5\sqrt{2} + 7$.

$$b=\sqrt{200}-\sqrt{50}+\sqrt{49}=\sqrt{2\times 100}-\sqrt{25\times 2}+7$$

$$=10\sqrt{2}-5\sqrt{2}+7=5\sqrt{2}+7$$

ب- بيّن أن العددين a و b مقلوبان .

$$ab=(5\sqrt{2}-7)(5\sqrt{2}+7)=(5\sqrt{2})^2-7^2=50-49=1$$

إذن a و b مقلوبان

ج- بيّن أن العددين b و $b(a-1)-1$ متقابلان .

$$b(a-1)-1+b=ba-b-1+b=0$$

إذن $b(a-1)-1$ و b متقابلان

تمرين عدد 7 :

1) نعتبر العددين $a=\left(\sqrt{3}+2\right)^2$ و $b=3\sqrt{18}-\sqrt{32}+7$

أ- بيّن أن $a=7+4\sqrt{3}$ و $b=7+5\sqrt{2}$.

$a=\left(\sqrt{3}+2\right)^2=3+4\sqrt{3}+4=7+4\sqrt{3}$

$b=3\sqrt{18}-\sqrt{32}+7=9\sqrt{2}-4\sqrt{2}+7=5\sqrt{2}+7$
$=7+5\sqrt{2}$

ب- قارن بين العددين $4\sqrt{3}$ و $5\sqrt{2}$ ثم استنتج مقارنة بين العددين a و b .

$\left(5\sqrt{2}\right)^2=50$ و $\left(4\sqrt{3}\right)^2=48$

$\left(5\sqrt{2}\right)^2>\left(4\sqrt{3}\right)^2$ و العددان موجبان إذن $5\sqrt{2}>4\sqrt{3}$

و منه $5\sqrt{2}+7>4\sqrt{3}+7$ أي $b>a$

2) نعتبر العدد $c=7-4\sqrt{3}$

أ- بيّن أن العددين a و c مقلوبان .

$ac=\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)=7^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2=49-48=1$

إذن a و c مقلوبان

ب- استنتج أن $bc > 1$.

a و c مقلوبان يعني $c = \frac{1}{a}$

$bc = b \times \frac{1}{a} = \frac{b}{a}$

ولنا $b > a$ (حسب السؤال 1) ب)

إذن $\frac{b}{a} > 1$ ومنه $bc > 1$.

3) بين أن العدد $\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + 2}$ هو عدد صحيح طبيعي .

$\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + 2} = \sqrt{a \times \frac{1}{c} + c \times \frac{1}{a} + 2} = \sqrt{a \times a + c \times c + 2}$

$= \sqrt{a^2 + c^2 + 2} = \sqrt{a^2 + c^2 + 2 \times a \times c} = \sqrt{(a+c)^2}$

$= \sqrt{(7 + 4\sqrt{3} + 7 - 4\sqrt{3})^2} = \sqrt{14^2} = 14$.

تمرين عدد 8 :

1) نعتبر العددين $a = 3 + \sqrt{162} - 10\sqrt{2}$ و $b = (1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) + 1$

أ- بيّن أن $a = 3 - \sqrt{2}$ و $b = \sqrt{3}$.

$$a = 3 + \sqrt{162} - 10\sqrt{2} = 3 + \sqrt{81\times 2} - 10\sqrt{2}$$

$$= 3 + 9\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = 3 - \sqrt{2}$$

$$b = (1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) + 1 = 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3 + 1$$

$$= \sqrt{3}$$

ب- استنتج علامة العدد a

$3 > \sqrt{2}$ إذن $3 - \sqrt{2} > 0$ ومنه $a > 0$

وبالتالي a عدد موجب

2) أ- بيّن أن $a^2 - b^2 = 2(4 - 3\sqrt{2})$.

$$a^2 - b^2 = (3 - \sqrt{2})^2 - \sqrt{3}^2 = 9 - 6\sqrt{2} + 2 - 3$$

$$= 8 - 6\sqrt{2} = 2(4 - 3\sqrt{2})$$

ب- قارن بين العددين 4 و $3\sqrt{2}$.

$4^2 = 16$ و $(3\sqrt{2})^2 = 18$

$(3\sqrt{2})^2 > 4^2$ والعددان موجبان إذن $4 < 3\sqrt{2}$.

ج- استنتج مقارنة العددين a و b .

$3\sqrt{2} > 4$ يعني $4 - 3\sqrt{2} < 0$

$a^2 - b^2 = 2(4 - 3\sqrt{2}) < 0$

إذن $a^2 < b^2$ والعددان موجبان إذن $a < b$