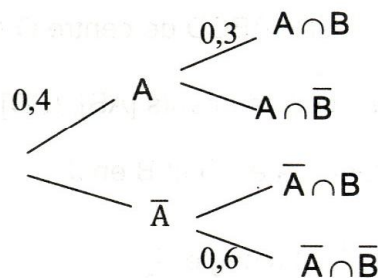


REPUBLIQUE TUNISIENNE ◇◇◇ MINISTRE DE L'EDUCATION	EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2012		
	Epreuve : MATHEMATIQUES	Durée : 4 h	Coefficient : 4
SECTION : mathématiques		Session de contrôle	

Le sujet comporte 3 pages.

Exercice 1 (3 points)

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre de probabilité suivant :



Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes en justifiant la réponse :

- 1) $p(\bar{A}) = 0,6$.
- 2) La probabilité de \bar{B} sachant A est égale à 0,7.
- 3) $p(B) = 0,7$.
- 4) $p(A \cup B) = 0,64$.

Exercice 2 (4 points)

Soit a un réel strictement positif.

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - (1+i)z + ia^2 = 0$.
- 2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .
On désigne par A et B les points d'affixes respectives a et ia.
 - a) Quelle est la nature du triangle OAB ?
 - b) Déterminer l'affixe du point C tel que OACB soit un carré.
- 3) Soient P et Q les points du plan tels que les triangles OAP et AQC sont équilatéraux de sens direct.
 - a) Montrer que l'affixe de P est égale à $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})a$.
 - b) Calculer l'affixe du point Q.
 - c) Montrer que les points B, P et Q sont alignés.

Exercice 3 (3 points)

1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $7x + 18y = 9$.

a) Montrer que le couple $(9, -3)$ est une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

2) Résoudre alors dans \mathbb{Z} , le système
$$\begin{cases} n \equiv 6 \pmod{7} \\ n \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$$

Exercice 4 (5 points)

On considère dans le plan orienté un carré ABCD de centre O tel que $(\widehat{AB, AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On note I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [AD].

Soit S la similitude directe qui transforme A en O et B en J.

1) Montrer que S est de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2) a) Déterminer les images des droites (BC) et (AC) par S.

b) En déduire S(C).

3) a) Déterminer l'image du carré ABCD par S.

b) En déduire que $S(D) = K$.

c) Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés (C, 1) et (K, 4).

d) Soit E le milieu du segment [OD]. Montrer que $S \circ S(A) = E$.

e) Construire Ω .

4) Montrer que les droites (AE), (CK) et (DI) sont concourantes.

Exercice 5 (5 points)

1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x \ln x$.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]0, +\infty[$.

Vérifier que $3,5 < x_0 < 3,6$.

c) En déduire le signe de g.

2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$.
- b) Dresser le tableau de variation de f .
- c) Vérifier que $f(\sqrt{x_0}) = \frac{1}{2x_0}$.
- d) Tracer la courbe (C). (On prendra $x_0 \approx 3,6$)
- 3) Soit (a_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $a_n = \int_1^n \frac{1}{t} f(t) dt$.
- a) Montrer que la suite (a_n) est croissante.
- b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0,1[$, $\ln x \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \ln x$.
- c) En déduire que $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1 + \ln n}{n}\right) \leq a_n \leq 1 - \frac{1 + \ln n}{n}$.
- d) Montrer alors que la suite (a_n) est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$.