I - التعداد و الحساب

" المبرهنة التمهيديّة لـ Gauss "

	مثال
a قاسم لـ c b قاسم لـ c a و b أوّليّان في ما بينهما إذا $a \times b$ قاسم لـ c	المطلوب: بيّن أنّ 12 قاسم لـ 3525132. الحلّ: 3 قاسم لـ 3525132 4 قاسم لـ 3525132 3 و 4 أوّليّان في ما بينهما إذا 3x4 قاسم لـ 3525132. يعني " 12 قاسم لـ 3525132 " . **أمثلة أخرى :** كل عدد يقبل القسمة على 3 و 5 فهو يقبل القسمة على 15. كل عدد يقبل القسمة على 3 و 7 فهو يقبل القسمة على 21. كل عدد يقبل القسمة على 9 و 5 فهو يقبل القسمة على 45. والأمثلة متعدّدة ....
	مثال
a قاسم لـ bc a و b أوّليّان في ما بينهما إذا a قاسم لـ c	7 قاسم لـ 5a 7 و 5 أوّليّان في ما بينهما إذا 7 قاسم لـ a.

تطبيقات

1 - إذا كان لنا 6 قاسم لـ $5^n a$ إذا 6 قاسم لـ a لأنّ 6 و 5^n أوّليّان في ما بينهما.

2 - بين أن $A = 3^{12} - 3^{11}$ هو عدد زوجي.

الحل:

$$A = 3^{12} - 3^{11} = (3-1) \times 3^{11} = 2 \times 3^{11}.$$

ومنه فإن A مضاعف لـ 2 يعني A عدد زوجي.

3 - بين أن $(9^{23} - 4 \times 9^{22})$ مضاعف لـ 5 :

$$9^{23} - 4 \times 9^{22} = (9-4) \times 9^{22} = 5 \times 9^{22}$$

و بالتالي $(9^{23} - 4 \times 9^{22})$ مضاعف لـ 5 .

II - الجذر التربيعي

يجب أن نعلم :

إذا كان $x^2 = a$ فإن $x = \sqrt{a}$ أو $x = -\sqrt{a}$ بحيث $a \in IR_+$

القاعدة 1 :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad , (a \in IR_+ \ , b \in IR_+)$$

استعمالاتها:

$$a = \sqrt{75} - 7\sqrt{3} = \sqrt{25 \times 3} - 7\sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = -2\sqrt{3}.$$

$$b = 8\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{5}} - 6\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = 8\frac{\sqrt{5 \times 7}}{\sqrt{5}} - 6\frac{\sqrt{3 \times 7}}{\sqrt{3}} = 8\frac{\cancel{\sqrt{5}} \times \sqrt{7}}{\cancel{\sqrt{5}}} - 6\frac{\cancel{\sqrt{3}} \times \sqrt{7}}{\cancel{\sqrt{3}}} = 8\sqrt{7} - 6\sqrt{7} = 2\sqrt{7}.$$

القاعدة 2 :

$$\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad , (a \in IR_+^*)$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad , (a \in IR_+ \ , b \in IR_+^*)$$

استعمالاتها:

$$a = \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{3}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{5\sqrt{3}}{10} + \frac{2\sqrt{3}}{10} = \frac{7\sqrt{3}}{10} .$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} .$$

القاعدة 3 :

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad , a \in IR$$

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a \ , \ a \in IR^+$$

استعمالاتها:

$$a = \sqrt{3^8} = \left[(\sqrt{3})^2\right]^4 = 3^4 = 81.$$

$$b = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| + |2-\sqrt{2}| = \cancel{\sqrt{2}} - 1 + 2 - \cancel{\sqrt{2}} = 1.$$

III - القوى في IR

القاعدة 1 :

$$(a\times b)^n = a^n \times b^n \ ,\ n\in\mathbb{Z}\ ,\ a\in IR^*,\ b\in IR^*$$

مثال:

$$\left(5\sqrt{3}\right)^2 = 5^2\times\left(\sqrt{3}\right)^2 = 25\times 3 = 75.$$

$$\left(-2\sqrt{7}\right)^3 = (-2)^3\times\left(\sqrt{7}\right)^3 = -8\times\sqrt{7}\times\sqrt{7}\times\sqrt{7} = -8\times 7\times\sqrt{7} = -56\sqrt{7}.$$

القاعدة 2 :

$$(a^n)^m = a^{n\times m}\ ,\ n\in\mathbb{Z}\ ,m\in\mathbb{Z}\ ,\ a\in IR^*$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

مثال:

$$\left(\sqrt{2}\right)^6 = \left(\sqrt{2}^2\right)^3 = 2^3 = 8\ .$$

$$\left(\sqrt{3}\right)^8 = \left(\sqrt{3}^2\right)^4 = 3^4 = 81\ .$$

القاعدة 3 :

$$a^n\times a^m = a^{n+m}\ ,\ n\in\mathbb{Z}\ ,m\in\mathbb{Z}\ ,\ a\in IR^*$$

مثال:

$$\left(\sqrt{7}\right)^{15}\times\left(\sqrt{7}\right)^{-15} = \left(\sqrt{7}\right)^{15+(-15)} = \left(\sqrt{7}\right)^0 = 1.$$

$$\left(\sqrt{5}\right)^{-123}\times\left(\sqrt{5}\right)^{125} = \left(\sqrt{5}\right)^{-123+125} = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5.$$

القاعدة 4 :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ ,\ n\in\mathbb{Z}\ ;\ b\in IR^*\ ;a\in IR^*$$

القاعدة 5 :

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} = a^{-n}\ ,\ n\in\mathbb{Z}\ ;\ a\in IR^*$$

IV - الجذاءات المعتبرة

النّـشر

$$\begin{rcases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 & \checkmark \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 & \checkmark \\ (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 & \checkmark \end{rcases}$$

❖ تطبيقات:

$$A = (y+3)^2 - y^2 = \cancel{y^2} + 2\times y \times 3 + 3^2 - \cancel{y^2} = 6y + 9.$$

$$B = \left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right)^2 + 2\sqrt{35} = \left(\sqrt{7}\right)^2 - 2\times\sqrt{7}\times\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\sqrt{35}$$

$$= 7 - \cancel{2\sqrt{35}} + 5 + \cancel{2\sqrt{35}} = 7 + 5 = 12.$$

$$C = \left(3 - \sqrt{5}\right)\left(3 + \sqrt{5}\right) = 3^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 9 - 5 = 4$$

التّفكيك

$$\begin{rcases} \boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2} & \checkmark \\ \boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2} & \checkmark \\ \boldsymbol{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)} & \checkmark \end{rcases}$$

❖ تطبيقات:

$$A = 9 + 6x + x^2 = \underbrace{3^2 + 2\times 3\times x + x^2}_{\boldsymbol{a^2 + 2\times a\times b + b^2}} = (3+x)^2 \quad \boldsymbol{= (a+b)^2}.$$

$$B = 9y^2 - 6y\sqrt{5} + 5 = \underbrace{(3y)^2 - 2\times 3y\times\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2}_{\boldsymbol{a^2 - 2\times a\times b + b^2}} = \left(3y - \sqrt{5}\right)^2 \quad \boldsymbol{= (a-b)^2}.$$

$$C = 16x^2 - 5 = \underbrace{(4x)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2}_{\boldsymbol{a^2 - b^2}} = \left(4x - \sqrt{5}\right)\left(4x + \sqrt{5}\right) \quad \boldsymbol{= (a-b)(a+b)}.$$

$$D = (5x+4)^2 - 9 = (5x+4)^2 - 3^2 = \left[(5x+4) - 3\right]\times\left[(5x+4) + 3\right]$$

$$= (5x + 4 - 3)(5x + 4 + 3) = (5x+1)(5x+7).$$

V - الترتيب والمقارنة

عموما :

$$(a-b) \in IR_- \quad \text{يعني} \quad a \leq b$$
$$(a-b) \in IR_+ \quad \text{يعني} \quad a \geq b$$

I الترتيب والجمع:

❖ $a \leq b$ يعني $a + C \leq b + C$ (لا يتغيّر اتجاه الترتيب عند إضافة نفس القيمة) .

❖ $a \leq b$ يعني $a - C \leq b - C$ (لا يتغيّر اتجاه الترتيب عند حذف نفس القيمة) .

❖ $a \leq b$ و $c \leq d$ إذا !! $a + C \leq b + d$ (جمع الحدود مثنى مثنى لا يغيّر اتجاه الترتيب).

II الترتيب والضرب:

1) **الحالة الأولى:** " الضرب في عدد موجب لا يغيّر اتجاه الترتيب "

❖ إذا كان لنا : $C \in IR_+^*$ فإنّ $a \leq b$ يعني $a \times C \leq b \times C$.

2) **الحالة الثانية:** " الضرب في عدد سالب يغيّر اتجاه الترتيب "

❖ إذا كان لنا : $C \in IR_-^*$ فإنّ $a \leq b$ يعني $a \times C \geq b \times C$.

3) **الحالة الثالثة:** " ضرب حدود جميعها سالبة مثنى مثنى "

❖ إذا كان لنا : $a \in IR_-$, $b \in IR_-$, $C \in IR_-$, $d \in IR_-$:

فإنّ : $a \leq b$ و $c \leq d$ يعني $a \times C \geq b \times C$.

4) **الحالة الرابعة:** " ضرب حدود جميعها موجبة مثنى مثنى "

❖ إذا كان لنا : $a \in IR_+$, $b \in IR_+$, $C \in IR_+$, $d \in IR_+$:

فإنّ : $a \leq b$ و $c \leq d$ يعني $a \times C \leq b \times C$

III الترتيب والمقلوب:

ليكن $a \in IR^*$ و $b \in IR^*$ بحيث a و b لهما **نفس العلامة** إذا :

❖ $a \leq b$ يعني $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

IV - الترتيب والمربّع:

❖ $a \in IR_+$, $b \in IR_+$: $a \leq b$ يعني $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ يعني $a^2 \leq b^2$.

❖ $a \in IR_-$, $b \in IR_-$: $a \leq b$ يعني $|a| \geq |b|$ يعني $a^2 \geq b^2$.

VI - الحصر والمجالات

VII -المعادلات والمتراجحات

VIII طالس