

الحصر

(1) - حصر مجموع عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث :

$$z \leq b \leq t \quad \text{و} \quad x \leq a \leq y$$

$$x + z \leq a + b \leq y + t$$

* مثال :

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 8$ و $-4 \leq y \leq 2$

لنحصر $x + y$.

$$3 + (-4) \leq x + y \leq 8 + 2$$

لدينا :

$$\underline{-1 \leq x + y \leq 10}$$

إذن :

(2) - حصر مقابل عدد حقيقي :

a عدد حقيقي بحيث : $x \leq a \leq y$

سيكون لدينا : $-y \leq -a \leq -x$

(3) - حصر فرق عددين حقيقيين :

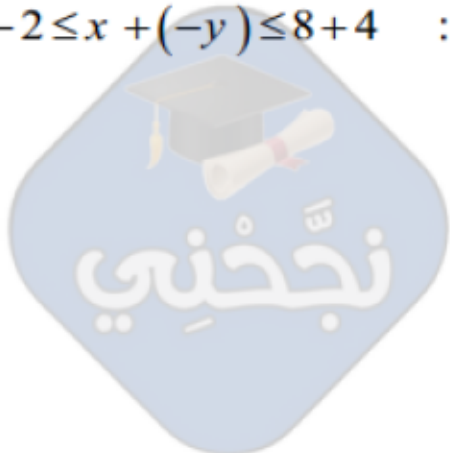
ملاحظة هامة : لحصر $a - b$ ، نكتب $a - b = a + (-b)$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه

* مثال :

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 8$ و $-4 \leq y \leq 2$ ؛ لنحصر $x - y$.

لدينا : $-2 \leq -y \leq 4$ و $3 \leq x \leq 8$ ؛ إذن : $3 - 2 \leq x + (-y) \leq 8 + 4$

ومنه فإن : $\underline{1 \leq x - y \leq 12}$



ا و b و x و y و z و t أعداد حقيقية موجبة بحيث :

$$z \leq b \leq t \text{ و } x \leq a \leq y$$

$$x \times z \leq a \times b \leq y \times t$$

* مثال 1 :

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 7$ و $1 \leq y \leq 3$ ؛ لنحصر $x \times y$.
 لدينا : $3 \times 1 \leq x \times y \leq 7 \times 3$ ؛ إذن : $3 \leq x \times y \leq 21$

* مثال 2 :

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $-5 \leq x \leq -2$ و $3 \leq y \leq 6$ ؛ لنحصر $x \times y$.
 لدينا : $2 \leq -x \leq 5$ ؛ إذن : $2 \times 3 \leq (-x) \times y \leq 5 \times 6$ أي $6 \leq -xy \leq 30$
 و منه فإن : $-30 \leq xy \leq -6$.

(5) - حصر مقلوب عدد حقيقي غير منعدم :

استنتاج :

a و x و y أعداد حقيقية غير منعدمة ولها نفس العلامة
 و حيث : $x \leq a \leq y$
 لدينا : $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{x}$

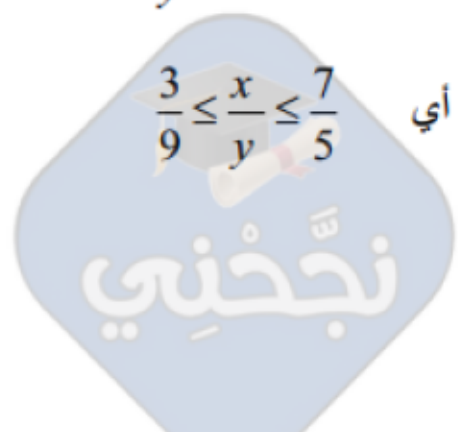
(6) - حصر خارج عددين :

ملاحظة هامة : لحصر $\frac{a}{b}$ ، نكتب $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه

* مثال : x و y عدنان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 7$ و $5 \leq y \leq 9$ ؛ لنحصر $\frac{x}{y}$.

لدينا : $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{5}$ ؛ إذن : $3 \times \frac{1}{9} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 7 \times \frac{1}{5}$ أي $\frac{3}{9} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5}$

و بالتالي فإن : $\frac{1}{3} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5}$



a و b و c أعداد حقيقية بحيث : $6 \leq a \leq 8$ و $-4 \leq b \leq -2$ و $-3 \leq c \leq 5$

أحصر : a^2 و b^2 و $a+2b-4c$ و $\frac{a+b}{b^2}$

الحل :

(1) - أحصر a^2 .

لدينا : $6^2 \leq a^2 \leq 8^2$ و منه فإن : $36 \leq a^2 \leq 64$

(2) - أحصر b^2 .

لدينا : $(-2)^2 \leq b^2 \leq (-4)^2$ و منه فإن : $4 \leq b^2 \leq 16$

(3) - أحصر $a+2b-4c$.

لدينا : $-8 \leq 2b \leq -4$ و $-4 \times (-3) \leq -4c \leq -4 \times 5$ أي $12 \leq -4c \leq 20$

إذن : $6 + (-8) + 12 \leq a + 2b - 4c \leq 8 + (-4) + 20$

و منه فإن : $10 \leq a + 2b - 4c \leq 24$

(4) - أحصر $\frac{a+b}{b^2}$.

لدينا : $6 + (-4) \leq a + b \leq 8 + (-2)$ أي $2 \leq a + b \leq 6$ و $\frac{1}{16} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4}$

إذن : $2 \times \frac{1}{16} \leq (a+b) \times \frac{1}{b^2} \leq 6 \times \frac{1}{4}$ أي $\frac{2}{16} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{6}{4}$

و بالتالي فإن : $\frac{1}{8} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{3}{2}$

