

EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2011

**SESSION
DE CONTRÔLE**

SECTION : MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

COEFFICIENT : 4

EXERCICE 1 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \int_1^x \frac{\cos^2 t}{t} dt$.

Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes, en justifiant la réponse.

- 1) Pour tout $x > 0$, $f'(x) \geq 0$.
- 2) Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 0$.
- 3) $f(2) \leq \ln 2$.

EXERCICE 2 (6 points)

Pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 3, on désigne par f_p la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$f_p(x) = p(\ln x) - x$, où \ln désigne la fonction logarithme népérien. On note (C_p) la courbe représentative de f_p dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

A-1) Etudier les variations de la fonction $f_3: x \mapsto 3\ln x - x$.

2) Montrer que l'équation $f_3(x) = 0$ admet exactement deux solutions, notées u_3 et v_3 , appartenant respectivement aux intervalles $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$.

3) On donne ci-dessous, le tableau de variation de f_p pour $p \geq 3$.

x	0	p	$+\infty$
$f'_p(x)$		+	0
f_p	$-\infty$	$p(\ln p) - p$	$-\infty$

a) Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 3$, il existe un unique réel u_p appartenant à l'intervalle $]1, p[$ tel que $f_p(u_p) = 0$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 3$, il existe un unique réel $v_p > p$ tel que $f_p(v_p) = 0$.

On définit ainsi, pour tout entier naturel $p \geq 3$, deux suites (u_p) et (v_p) .

B- Dans cette partie on se propose d'étudier les deux suites (u_p) et (v_p) définies précédemment.

- 1) Déterminer la limite de la suite (v_p) .
- 2) On a représenté dans la **figure 1** de l'annexe ci jointe les courbes C_3 , C_4 , C_5 et C_6 représentatives des fonctions f_3 , f_4 , f_5 et f_6 .
 - a) Placer sur l'axe des abscisses les termes u_3 , u_4 , u_5 et u_6 de la suite (u_p) .
 - b) Représenter sur l'axe des ordonnées les réels $f_3(u_4)$, $f_4(u_5)$ et $f_5(u_6)$.
- 3)
 - a) Montrer que pour tout entier naturel $p \geq 3$, $f_p(u_{p+1}) < 0$.
 - b) En déduire que la suite (u_p) est décroissante et qu'elle est convergente.
 - c) Montrer que $\frac{\ln u_p}{u_p} = \frac{1}{p}$. En déduire la limite de la suite (u_p) .

EXERCICE 3 (5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1,3,2)$, $B(1,-1,-2)$ et $C(2,4,1)$.

- 1)
 - a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
 - b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z - 1 = 0$.
- 2) Soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 4 = 0$.
 - a) Déterminer le centre I et le rayon r de la sphère S.
 - b) Montrer que la sphère S coupe le plan (ABC) suivant le cercle (Γ) de diamètre $[AB]$.
 - c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (Γ) .
- 3) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport 3 et S' l'image de la sphère S par h.
 - a) Déterminer le rayon de la sphère S' et les coordonnées de son centre J.
 - b) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère S' suivant un cercle (Γ') .
 - c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (Γ') en un point E que l'on précisera.

EXERCICE 4 (6 points)

Le plan est orienté.

Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, le triangle OAB est rectangle isocèle en O et de sens direct.

H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), A' est le point du segment [OH] tel que

$OA' = \frac{1}{2} OA$ et H' est le projeté orthogonal du point A' sur la droite (OB).

Soit f la similitude directe de centre O qui envoie A en A'.

1) Déterminer le rapport et l'angle de f.

2) On note B' l'image du point B par la similitude directe f.

a) Déterminer la nature du triangle OA'B'.

b) Construire le point B'.

c) Montrer que $f(H) = H'$.

3) Soit I le milieu du segment [A'B] et J le milieu du segment [AA'].

a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoie J en O et I en H.

b) Montrer que R est une rotation dont on déterminera l'angle.

c) Soit K le milieu du segment [AB']. Montrer que $JK = OH'$ et que $(\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{OH'}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

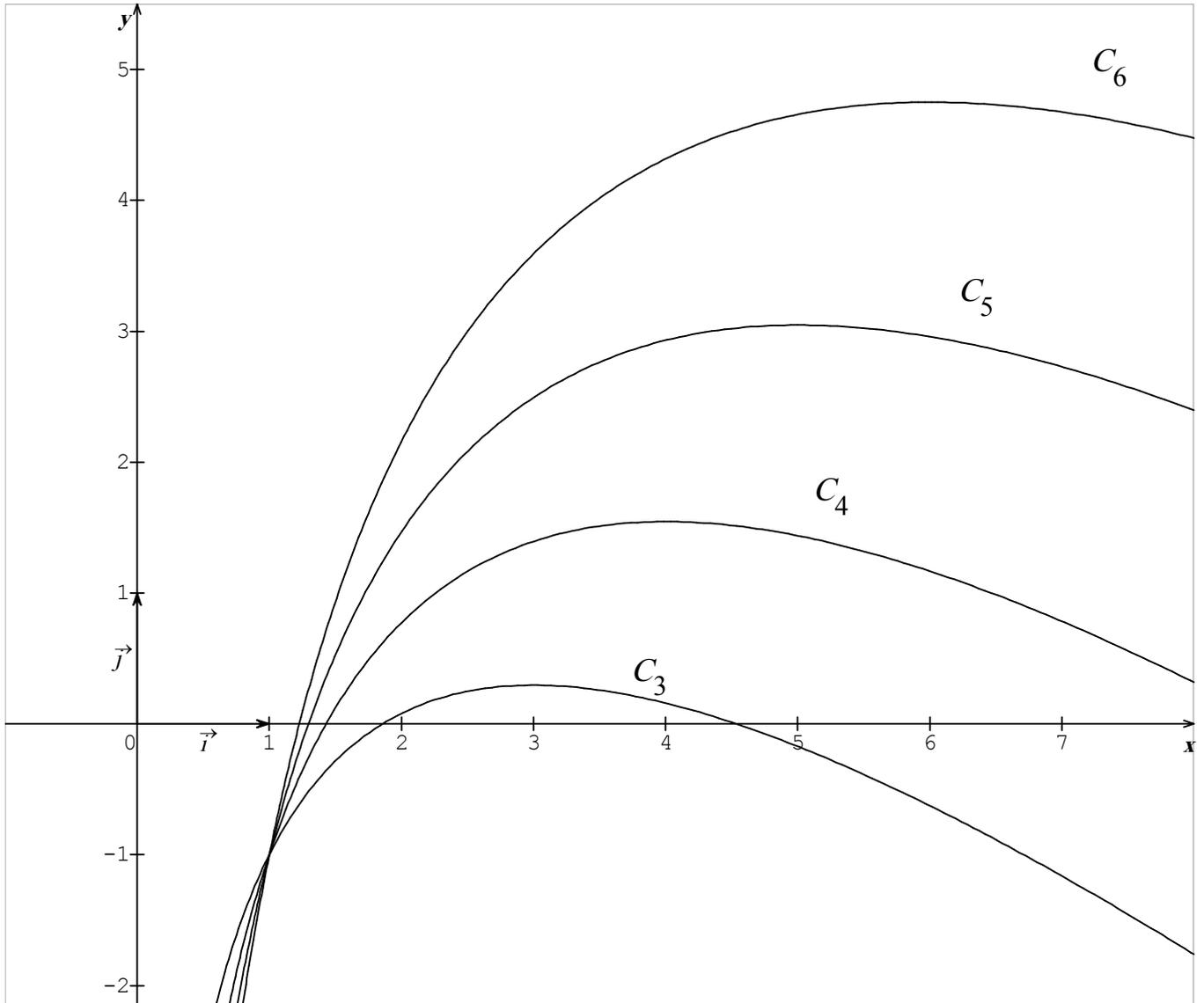
d) Déterminer alors R(K).

e) En déduire que $IK = HH'$ et que (IK) et (HH') sont perpendiculaires.

4) Montrer que le quadrilatère IHK H' est un carré.

ANNEXE

EXERCICE 2 figure1



EXERCICE 4 figure 2

