REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

1^e

Mathématiques

Première année de l'enseignement secondaire

Auteurs

Rachid Mcharek
Inspecteur prinicipal

Najiba Mhamdi
Inspectrice

Sadok Klila
Professeur

Leïla Ben Youssef
professeur

Evaluateurs

Hikma Smida
Professeur Universitaire

Jaafar Ben Yazid
Inspecteur Général

Slimane Hassayoun
Inspecteur principal

Centre National Pédagogique

Photo en couverture : Bivonn, 1981.

Préface

Les mathématiques contribuent à former les esprits, elles favorisent la créativité et développement l'imagination et l'intuition.
C'est une discipline qui contribue au développement intellectuel, social et culturel de chacun. De ce fait, les mathématiques sont utiles et nécessaires à tous les élèves.

Conformément aux nouveaux programmes mis en place par la loi d'orientation de l'éducation et de l'enseignement scolaire du 23 juillet 2002, ce manuel vise à permettre à tous les élèves de développer des compétences.
Ils apprendront à :

- Pratiquer une démarche mathématique en développant leur capacité à chercher, à exprimer, à conjecturer, à modéliser et à raisonner.

- Mobiliser des algrithmes et des procédures dans des situations mathématiques.

- Utiliser et appliquer les mathématiques pour résoudre des problèmes dans des situations familières ou non familières, en rapport avec leur environnement.

- Communiquer oralement ou par écrit dans un langage mathématique.

- Utiliser les technologies de l'informantion et de la communication dans leur travail de recherche, de propection et de contrôle ainsi que comme moyen d'échange et de communication.

- Collecter, organiser et exploiter l'information.

- Apprécier la contribution des mathématiques au développement des autres disciplines, à la compréhension des phénomènes et à la prise de décision.

Remerciement

Les auteurs remercient les inspecteurs de mathématiques dont les conseils pertinents ont été utiles à la réalisation de ce manuel.

Sommaire

Organisation des chapitres

Reprendre

Cette rubrique est destineée à être traitée avec l'aide du professeur.

Elle vise à permettre aux élèves de :

- Consolider leus acquis antérieurs.
- Identifier leurs lacunes éventuelles.
- Communiquer oralement et par écrit, en utilisant un vocabulaire mathématique en relation avec les notions abordées dans le chapitre.

Découvrir

Cette rubrique est destinée à être traitée avec l'aide du professeur.

Les activités proposées visent à permettre aux élèves de :

- Développer leur capacité à chercher, à expérimenter, à modéliser, à conjecturer et à raisonner.
- Construire les savoirs et savoir-faire à connaître.

Retenir

Dans cette rubrique, se trouvent les résultats qu'il est indispensable pour les élèves de connaître.

S'auto-évaluer

Cette rubrique vise à permettre à l'élève de faire sa propre évaluation.

Mobiliser ses compétences

Cette rubrique est destinée à être traitée avec l'aide du professeur, après que les élèves aient accompli des exercices d'application directe.
Elle est consacrée à la résolution de problèmes, pour la plupart intégratifs, dans des situations mathématiques ou en rapport avec l'environnement.
Les situations proposées sont significatives et chacune d'entre elles est accompagnée d'une stratégie de résolution.
Cette rubrique vise à permettre aux élèves de :

- Utiliser différentes approches de recherche.
- Approfondir leur compréhension des notions étudiées.
- Discuter la stratégie proposée.
- Rechercher des stratégies alternatives.
- Elaborer et communiquer une solution au problème.

Exercices et problèmes

Cette rubrique est composée de trois parties.

Appliquer

Cette partie comporte des exercices d'application directe du cours.
Traités aprés la mise en place des notions à connaître, ces exercices permettront aux élèves de s'entraîner et de se familiariser avec les notions étudiées.

Maîtriser

Les exercices et les problèmes proposés dans cette partie, visent à permettre aux élèves de mobiliser leurs compétences de façon autonome.

Avec l'ordinateur

Dans cette partie, les élèves utiliseront un logiciel numérique ou géométrique pour chercher, expérimenter ou contrôler un résultat.

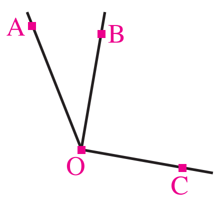
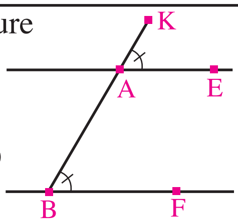
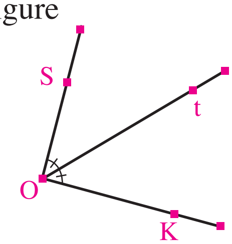
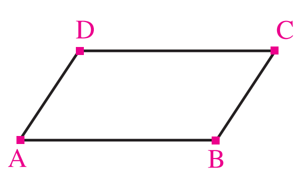
Math - Culture

Cette rubrique propose des éléments d'histoire des mathématiques, des éléments sur la contribution des mathématiques à la compréhension des phénomènes et quelques problèmes historiques.

ANGLES

Reprendre

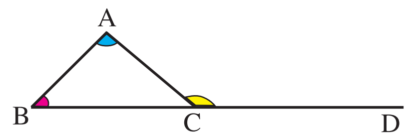
Pour chaque énoncé, on propose trois réponses A, B et C. Une ou plusieurs sont correctes. Lesquelles ?

Réponses / **Enoncés**	**A**	**B**	**C**
Dans la figure ci-contre, 	l'angle $\widehat{AOB}$ est aigu.	l'angle $\widehat{AOB}$ est obtus.	l'angle $\widehat{BOC}$ est obtus.
Dans la figure ci-contre, (AE) // (BF) 	les angles $\widehat{KAE}$ *et* $\widehat{KBF}$ sont égaux.	les angles $\widehat{KAE}$ *et* $\widehat{KBF}$ sont alternes-internes.	les angles $\widehat{KAE}$ *et* $\widehat{KBF}$ sont correspondants.
Dans la figure ci-contre, 	les angles $\widehat{SOt}$ *et* $\widehat{tOK}$ sont adjacents	la demie-droite [Ot) est la bissectrice de l'angle $\widehat{SOK}$	Les angles $\widehat{SOt}$ et $\widehat{tOk}$ sont supplémentaires
 ABCD est un parallélogramme.	Les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ sont supplémentaires.	Les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{BCD}$ sont correspondants.	Les angles $\widehat{DBA}$ et $\widehat{BCD}$ sont égaux.

Angles et figures de base

Activité 1

1- On considère la figure ci-contre
Montrer que $\widehat{CAB} + \widehat{ABC} = \widehat{ACD}$.



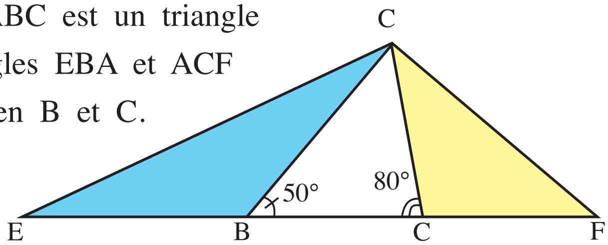
2- Que vaut $\widehat{ACD}$ lorsque le triangle ABC est équilatéral ?

3- Que vaut $\widehat{ACD}$ lorsque le triangle ABC est rectangle isocèle en B ?

4- On suppose que le triangle ABC est isocèle en C. Ecrire $\widehat{ACD}$ en fonction de $\widehat{ABC}$.

Activité 2

1- Dans la figure ci-contre ABC est un triangle de périmètre 13cm, les triangles EBA et ACF sont isocèles respectivement en B et C.

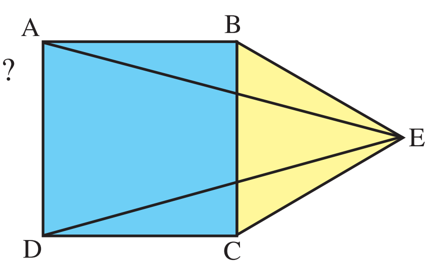


a) Que vaut $\widehat{AEB}$?
b) Que vaut $\widehat{AFC}$?
c) Calculer EF.

2- On se propose de construire un triangle ABC de périmètre 13cm et dont deux de ses angles sont égaux à 72° et 66°.
a) Tracer un triangle AEF tel que EF=13cm, $\widehat{AEF}$=36° et $\widehat{AFC}$=33°.
b) Placer sur le segment [EF] les points B et C tels que BE = BA et CF = CA.
c) Vérifier que le triangle ABC convient.

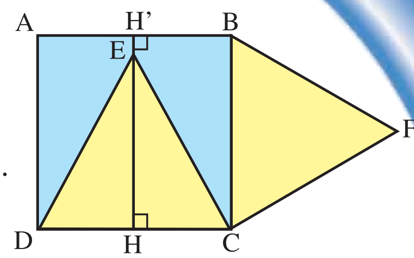
Activité 3

Dans la figure ci-contre ABCD est un carré et BCE est un triangle équilatéral.



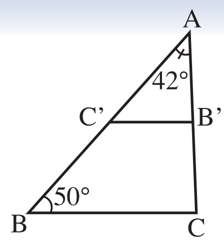
1- Quelle est la nature du triangle DCE ?
2- Que vaut $\widehat{CED}$? $\widehat{AED}$?
3- Donner la mesure de chacun des angles de la figure.

Activité 4 Dans la figure ci-contre ABCD est un carré de côté a, DCE et BCF sont des triangles équilatéraux.
H et H' sont les projetés orthogonaux respectifs de E sur les droites (DC) et (AB).
1- Quelle est la nature du chacun des triangles ADE et FCE ?
2- Montrer que les points A, E et F sont alignés.
3- Exprimer en fonction de a, les distances EF, EH, EH', AE et AF.

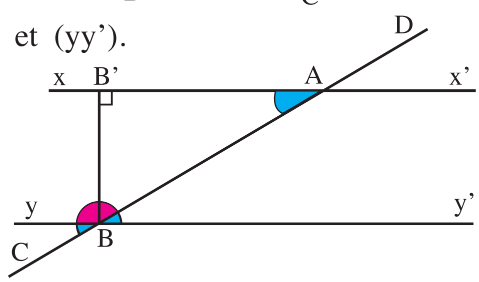


Angles égaux et droites parallèles

Activité 5 Dans la figure ci-contre, C' est le milieu de [AB] et B' est le milieu de [AC].
Calculer tous les angles de la figure.

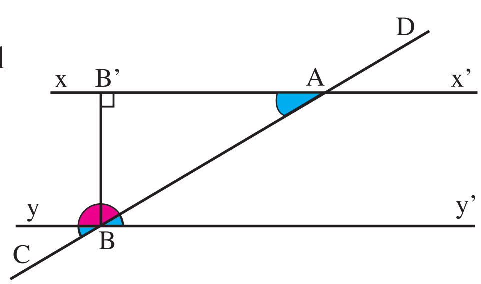


Activité 6 On considère deux droites parallèles (xx') et (yy').
Une droite D est sécante à (xx') et (yy') respectivement en A et en B.
on désigne par B' le projeté orthogonal de B sur (xx').
1- Montrer que les angles intérieurs $\widehat{xAB}$ et $\widehat{yBA}$ sont supplémentaires.
2- Montrer que les angles alternes-internes $\widehat{xAB}$ et $\widehat{y'BA}$ sont égaux.
3- Montrer que les angles correspondants $\widehat{xAB}$ et $\widehat{yBC}$ sont égaux.

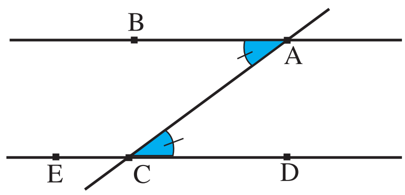


Activité 7 On considère une droite D et deux droites (xx') et (yy') sécantes à D, respectivement en A et en B.
On désigne par B' le projeté orthogonal de B sur (xx').
On suppose que les angles $\widehat{xAB}$ et $\widehat{yBA}$ sont supplémentaires.

a) Que peut-on dire des angles $\widehat{x'AB}$ et $\widehat{y'BA}$?
b) Montrer que (BB') est perpendiculaire à (yy').
c) Quelle est la position relative des droites (xx') et (yy') ?



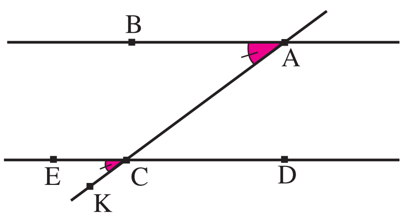
Activité 8 Observer la figure ci-contre où les angles alternes-internes $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACD}$ sont égaux.



1- Montrer que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ECA}$ sont supplémentaires.

2- Quelle est la position relative des droites (AB) et (CD) ?

Activité 9 Observer la figure ci-contre où les angles correspondants $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ECK}$ sont égaux.

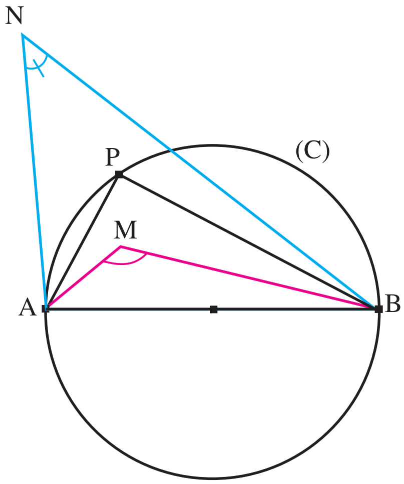


1- Montrer que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ECA}$ sont supplémentaires.

2- Quelle est la position relative des droites (AB) et (CD) ?

Angles inscrits et angles au centre

Activité 10 A et B sont deux points distincts et (C) est le cercle de diamètre [AB].



1- Soit P un point de (C) distinct de A et B.

Montrer que APB est un triangle rectangle en P.

2- Soit M un point intérieur au cercle.

Montrer que $\widehat{AMB} > 90°$.

3- Soit N un point extérieur au cercle.

Montrer que $\widehat{ANB} < 90°$.

4- Quel est l'ensemble des points P du plan tel que $\widehat{APB} = 90°$?

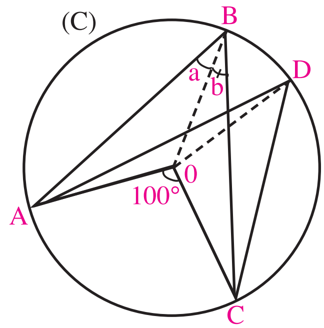
Activité 11 Observer la figure ci-contre.

1- Calculer $\widehat{AOB} + \widehat{COB}$.

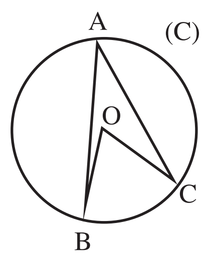
2- Calculer $(2a + 2b)$.

3- Calculer $\widehat{ABC}$ et comparer à $\widehat{AOC}$.

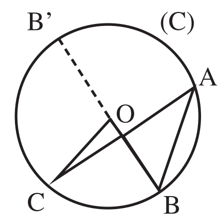
4- Calculer $\widehat{ADC}$. Que remarque-t-on ?



Activité 12 Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle (C) de centre O.
Comparer dans chacun des cas $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BOC}$.

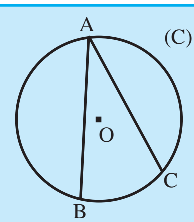


1er cas

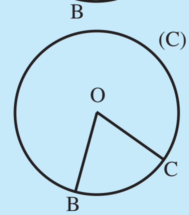


2ème cas

Un angle qui a son sommet sur un cercle et ses côtés qui recoupent le cercle est appelé angle inscrit dans ce cercle.

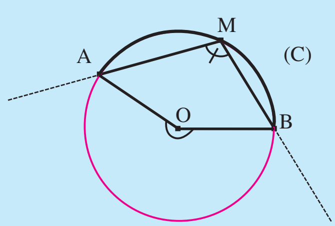


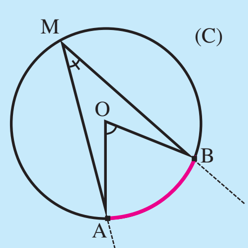
Un angle dont le sommet est le centre d'un cercle est appelé angle au centre de ce cercle.



L'angle $\widehat{AMB}$ est inscrit dans le cercle (C) et intercepte l'arc $[\overset{\frown}{AB}]$.

L'angle $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre associé.

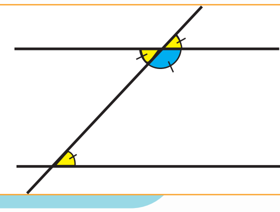




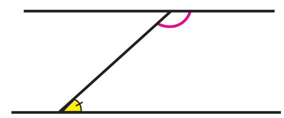
Retenir

Angles égaux et droites parallèles

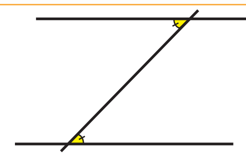
Deux droites parallèles forment avec une sécante,
- deux angles intérieurs d'un même côté supplémentaires;
- deux angles alternes internes égaux;
- deux angles correspondants égaux.



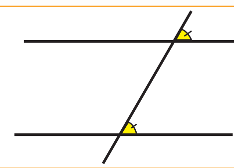
Si deux droites forment avec une sécante deux angles intérieurs d'un même côté supplémentaires alors elles sont parallèles.



Si deux droites forment avec une sécante deux angles alternes internes égaux alors elles sont parallèles.



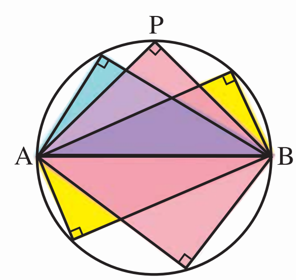
Si deux droites forment avec une sécante deux angles correspondants égaux alors elles sont parallèles.



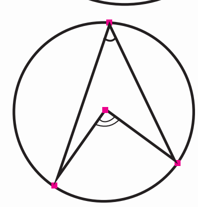
Angle inscrit et angle au centre associé

Si le côté [BC] d'un triangle ABC est diamètre de son cercle circonscrit alors ce triangle est rectangle en A.

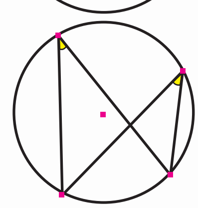
A et B sont deux points distincts.
Les points P tels que $\widehat{APB} = 90°$ sont les points du cercle de diamètre [AB], privé des points A et B.



Un angle inscrit dans un cercle est égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.



Deux angles inscrits qui interceptent le même arc sont égaux.



Mobiliser ses compétences

Angles et figures de base

Situation 1

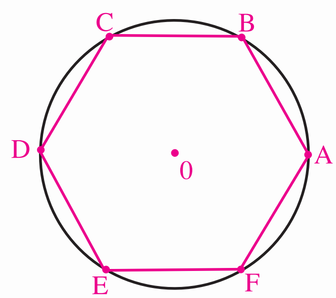
Soit deux points distincts A et O. Construire à l'aide du compas seulement, le point A' symétrique du point A par rapport à O.

Stratégie de résolution

- Tracer un cercle (C) de centre O et de rayon OA.
- Placer un point B de (C) tel que AB = OA.
- Placer le point C de (C), distinct de A, tel que OB = BC.
- Placer le point A' de (C), distinct de B, tel que OC = CA'.
- Expliquer pourquoi A' est le symétrique de A par rapport à O.

Situation 2

Un polygone est dit régulier s'il est inscrit dans un cercle et si tous ses côtés sont isométriques.
Construire un hexagone régulier connaissant son centre O et un de ses sommets A.



Stratégie de résolution

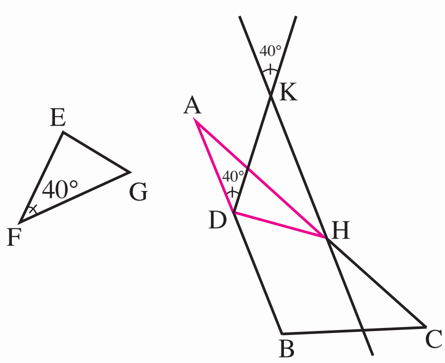
- Tracer un cercle de centre O et de rayon OA.
- Placer un point B de (C) tel que AB = OA.
- Placer le point C de (C), distinct de A, tel que OB = BC.
- Placer le point D de (C), distinct de B, tel que CD = OC.
- Continuer le procédé jusqu'à obtenir l'hexagone. Justifier.

Angles et droites parallèles

Situation 1

On se propose de découper dans la plaque triangulaire ABC ci-contre, un triangle ayant la même aire que le triangle EFG et ayant pour sommet A.
Dans la figure ci-contre EF = AD et FG = DK.

1- Comparer les triangles ADK et EFG.
2- Quelle est la position relative des droites (AB) et (KH) ?
3- Montrer que les triangles ADH et EFG ont la même aire.

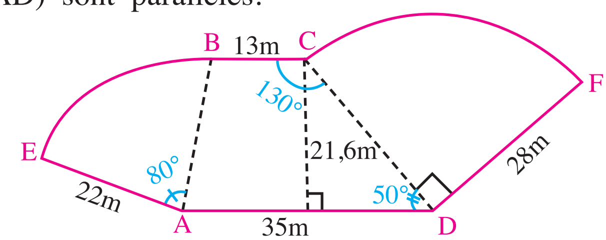


Stratégie de résolution

1- Penser aux cas d'isométrie des triangles.
2- Penser aux angles correspondants.
3- Penser à la distance entre deux droites parallèles. Conclure.

Situation 2

On a représenté ci-contre le plan d'une terrasse.
$[\overset{\frown}{EB}]$ et $[\overset{\frown}{CF}]$ sont des arcs de cercles de centres respectifs A et D.
1- Montrer que les droites (BC) et (AD) sont parallèles.
2- Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'aire de la terrasse.



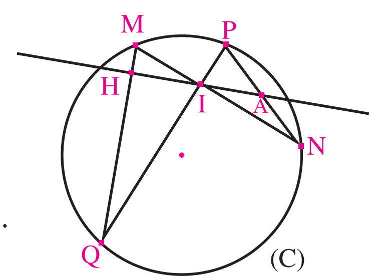
Stratégie de résolution

1- Penser aux angles intérieurs d'un même côté.
2- Calculer l'aire du trapèze ABCD.
Calculer l'aire des secteurs $\widehat{EAB}$ et $\widehat{CDF}$. Conclure.

Utiliser les angles inscrits pour comparer des grandeurs

Situation 1

[MN] et [PQ] sont deux cordes perpendiculaires d'un cercle (C). Ces deux cordes se coupent en I.
Soit H le pied de la hauteur issue de I dans le triangle IMQ.
La droite (IH) coupe [PN] en A.
1- Montrer que les angles $\widehat{MIH}$ et $\widehat{MQI}$ sont égaux.
2- Montrer que le triangle AIN est isocèle.
3- Montrer que A est le milieu de [PN].



Stratégie de résolution

1- Les triangles QHI et MIQ étant rectangles respectivement en H et I, il suffit de remarquer que les angles $\widehat{MIH}$ et $\widehat{MQI}$ ont un même angle complémentaire.
(On rappelle que deux angles sont complémentaires si leur somme est égale à 90°).
2- Utiliser le résultat de (1) et remarquer que les angles $\widehat{MQI}$ et $\widehat{INP}$, inscrits dans (C), interceptent le même arc pour conclure sur la nature du triangle AIN.
3- Il suffit de remarquer que PIN est un triangle rectangle.

Situation 2

On considère un cercle (C) du centre O et de rayon 4 cm et un point A tel que OA = 5 cm. Le cercle (C') de diamètre [OA] coupe (C) en T et T'.

1- a) Montrer que (AT) et (AT') sont les tangentes à (C) issues de A.

b) Montrer que AT = AT'. Calculer AT.

2- Montrer que la droite (OA) est bissectrice de l'angle $\widehat{TOT'}$.

3- Soit M un point de (C) et intérieur au cercle (C'). La tangente à (C) en M coupe [AT] en P et [AT'] en P'.

a) Montrer que le périmètre du triangle APP' est constant. Que vaut ce périmètre ?

b) Montrer que l'angle $\widehat{POP'}$ est constant.

Stratégie de résolution

1- a) Faire une figure. On rappelle que si un côté d'un triangle est diamètre de son cercle circonscrit alors ce triangle est rectangle. Conclure.

b) Utiliser le résultat de (a) et le fait que le triangle OTT' est isocèle de sommet principal O pour conclure sur la nature du triangle ATT'. Utiliser le théorème de Pythagore pour calculer AT.

2- On rappelle que si un point est à égale distance des deux côtés d'un angle alors il appartient à la bissectrice de cet angle. Conclure.

3- Identifier d'abord les tangentes à (C) issues des points P et P'.

a) Exprimer alors le périmètre de APP' à l'aide de AT. Conclure.

b) Utiliser le résultat de (2). Conclure.

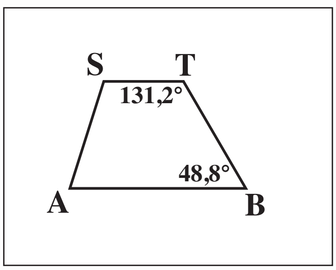
Vrai ou Faux

Répondre par vrai ou faux.

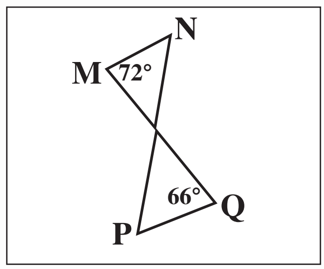
Un angle de 3° regardé avec une loupe "grossissant 2 fois" est doublé.

Observer

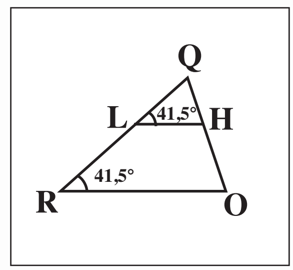
Répondre par vrai ou faux.



(AB) // (ST).

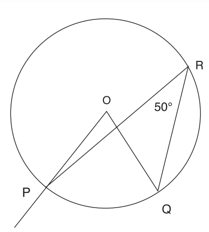


(MN) // (PQ).

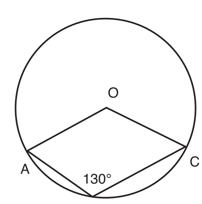


(LH) // (OR).

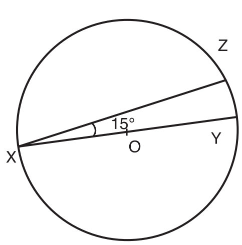
Recopier et compléter



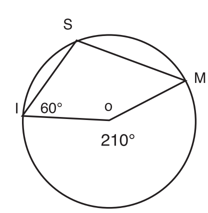
$\widehat{POQ}$ = ...



$\widehat{AOC}$ = ...



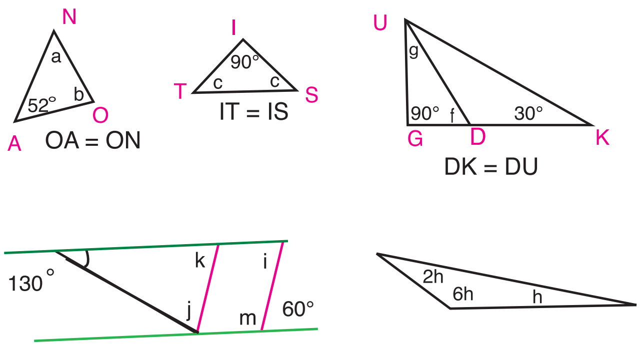
$\widehat{ZOY}$ = ...



$\widehat{SMO}$ = ...

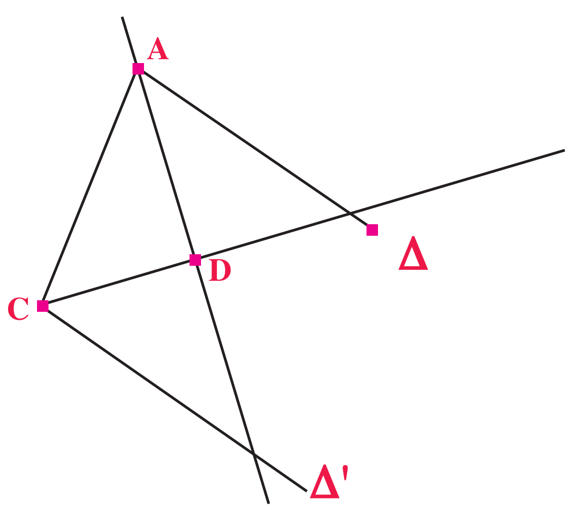
Appliquer

1 Calculer les angles désignés par une lettre.



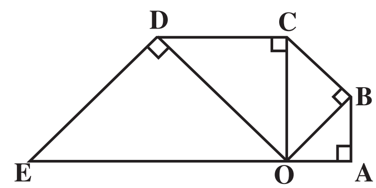
Les droites de même couleur sont parallèles.

2 Dans la figure qui suit Δ est parallèle à Δ', [AD) est la bissectrice de $\widehat{A}$ et [CD) est la bissectrice de $\widehat{C}$.



Montrer que $\widehat{ADC} = 90°$.

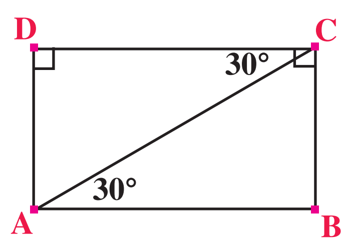
3 Observer la figure suivante où chacun des triangles rectangles est isocèle.



a) Montrer que
- Les droites (OC) et (OA) sont perpendiculaires.
- Les points E, O et A sont alignés.
- Les droites (OB) et (OD) sont perpendiculaires.

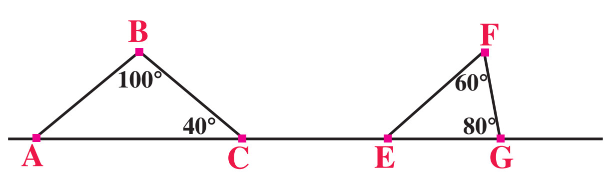
b) Calculer OB, OC, OD et OE lorsque OA = 1cm.

4 Observer la figure ci-dessous
a) Montrer que ABCD est un rectangle.
b) ABCD est-il un carré ?



5 Tracer un triangle équilatéral ABC tel que AB = 10cm et placer M sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ tel que AM = 5cm.
(AM) coupe [BC] en H.
a- Vérifier que M appartient à [AH].
b- Calculer l'aire du triangle ABM.

6 Dans la figure qui suit les points A, C, E et G sont alignés.



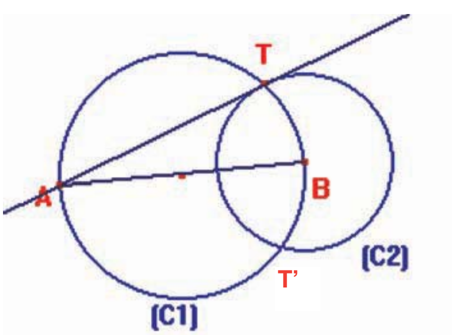
Démontrer que les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

7 (C) et (C') désignent deux cercles de centres respectifs O et O' tangents extérieurement en P. Une droite passant par P recoupe (C) en A et (C') en A'.
Montrer que les droites (OA) et (O'A') sont parallèles.

8 Tracer un triangle ABC isocèle en A. Soit [A t) la bissectrice de l'angle extérieur à $\widehat{A}$. Montrer que les droites (A t) et (BC) sont parallèles.

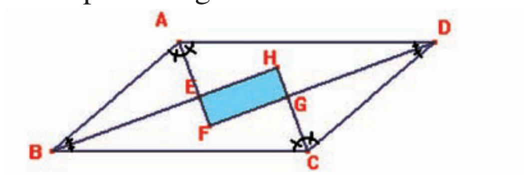
9 a) Calculer le périmètre d'un cercle circonscrit à un triangle EFG rectangle en E et dont l'hypoténuse mesure 6cm.
b) Calculer l'aire du disque limité par le cercle circonscrit à un triangle ABC rectangle en A et tel que $BC = 5$cm.

10 Recopier la figure suivante où (C_1) est un cercle de diamètre [AB], (C_2) est un cercle de centre B qui coupe (C_1) en deux points T et T'.
Montrer que les droites (AT) et (AT') sont les tangentes au cercle (C_2) issues de A.



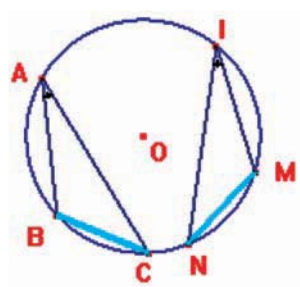
Maîtriser

11 Dans la figure qui suit ABCD est un parallélogramme.



1- Quelle est la nature du quadrilatère EFGH?
2- Quelle est la nature du quadrilatère EFGH lorsque ABCD est un rectangle ?
3- Quelle est la nature du quadrilatère ABCD lorsque les points E, F, G et H sont confondus ?

12 Dans la figure ci-dessous (C) est un cercle de centre O et $\widehat{BAC}$ et $\widehat{MIN}$ sont deux angles inscrits égaux.
Montrer que les arcs $[\overset{\frown}{CB}]$ et $[\overset{\frown}{MN}]$ sont isométriques.



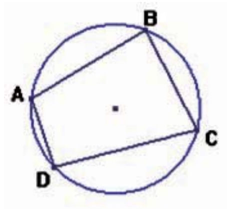
13 On considère un triangle équilatéral ABC et son cercle circonscrit (C).
1- A tout point M de l'arc $[\overset{\frown}{BC}]$ ne contenant pas A, on associe le point N du segment [AM] tel que MN = MC. Montrer que le triangle MNC est équilatéral.
2- La droite (CN) recoupe le cercle (C) en P. Déterminer la nature du triangle APN puis celle du quadrilatère MNPB.

14 A, B, C et D sont quatre points distincts appartenant à un même cercle(C).

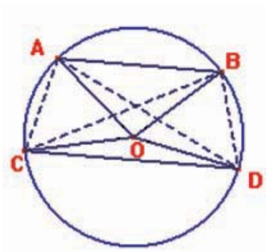
Exercices et problèmes

1- Montrer que les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{DCB}$ sont supplémentaires.

2- Montrer que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ sont supplémentaires.



15 Soit un triangle ABC inscrit dans un cercle (C).
On trace les hauteurs [AA’] et [CC’].
Soit H l’orthocentre du triangle ABC.
La hauteur (AA’) recoupe (C) en D.
Démontrer que la demi-droite [CB) est la bissectrice de l’angle
$\widehat{HCD}$.



16 Dans la figure ci-contre les cordes [AB] et [CD] sont parallèles.

a) Comparer les triangles ACD et BCD.

En déduire que AC = BD.

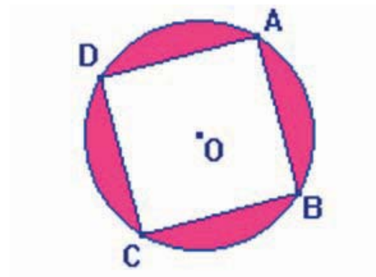
b) Montrer que $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$.

17 Dans la figure ci-dessous ABCD est un carré de côté 6cm inscrit dans un cercle (C) de centre O.

1- a) Calculer l’aire de la partie colorée.

b) Reproduire cette figure et tracer la tangente Δ au cercle (C) en A.

2 - La médiatrice de [AD] coupe Δ en N. Calculer l’aire du triangle CDN.



18 Soit [AB] un segment fixe de milieu O. Choisir un point M n’appartenant pas à (AB) tel que OM = OA. Soit K le projeté orthogonal de M sur (AB).

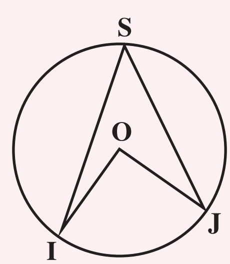
a) Exprimer de deux façons l’aire du triangle AMB.

b) Quelle doit être la position de M pour que KM soit maximale ?

c) Déduire la position de M pour que le produit MA.MB soit maximum.

Avec l’ordinateur

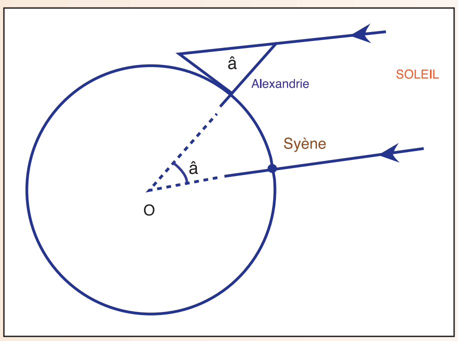
A l’aide d’un logiciel :
- Tracer un cercle (C) de centre O et marquer deux points I et J sur ce cercle. Mesurer $\widehat{IOJ}$.
- Placer un point S à l’intérieur de (C). Mesurer $\widehat{ISJ}$.
A-t-on $\widehat{IOJ} = 2\ \widehat{ISJ}$?
- Placer un point R à l’extérieur de (C). Mesurer $\widehat{IRJ}$.
A-t-on $\widehat{IOJ} = 2\widehat{IRJ}$?



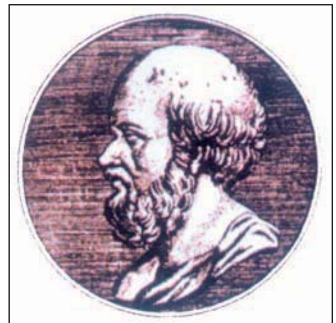
Math - Culture

Mesurer la terre avec Eratosthène

Quand le soleil éclaire le fond d'un puits dans la ville de Syène (aujourd'hui Assouan), à Alexandrie, un bâton vertical de 1 mètre fait une ombre de 0,125 mètres, ce qui donne â = 7,12°. La distance de Syène à Alexandrie étant environ 800km, Eratosthène en déduit la circonférence terrestre puis le rayon de la terre.



Les rayons solaires sont supposés parallèles. Les angles alternes internes sont égaux.


Eratosthène

Note historique

Né à Cyrène, en Lybie, vers 275 av. J.C, Eratosthène était le directeur de la bibliothèque d'Alexandrie (en Egypte) de 235 jusqu'à sa mort en 194 av. J.C.

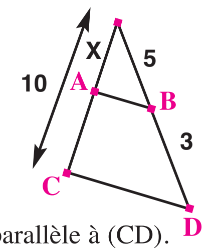
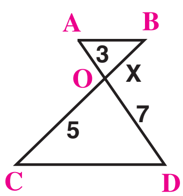
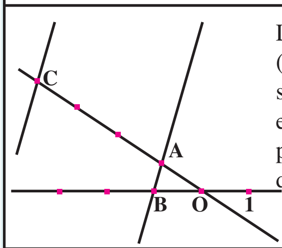
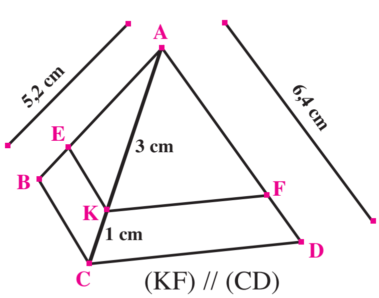
Il est célèbre pour cette mesure de la terre et pour le procédé de détermination des nombres premiers appelé «Crible d'Eratosthène».

Les sommets de l'étoile sont les 5 sommets d'un pentagone régulier ABCDE.
Que vaut l'angle $\widehat{BAE}$?
Tracer un pentagone et déduire une construction de l'étoile.

Théorème de Thalès et sa réciproque

Reprendre

Pour chaque énoncé, on propose trois réponses A, B et C. Une ou plusieurs sont correctes. Lesquelles ?

Réponses / Enoncés	A	B	C
 (AB) est parallèle à (CD).	$\frac{x}{10} = \frac{5}{3}$.	$\frac{x}{10} = \frac{5}{8}$.	$10x = 5 \times 8$.
 (AB) est parallèle à (CD).	$\frac{x}{7} = \frac{3}{5}$.	$\frac{x}{5} = \frac{3}{7}$.	$x + 5 = 3 + 7$.
 Les droites (AB) et (CD) sont parallèles et D est un point de la droite (OB).	L'abscisse de D sur la droite (OB) est égale à -3.	L'abscisse de D sur la droite (OB) est égale à -4.	L'abscisse de D sur la droite (OB) est égale à $\frac{4}{3}$.
 (KF) // (CD) (EK) // (BC).	Le point E est le milieu du segment [AB].	Le point F est le milieu du segment [AD].	$\frac{AD}{FD} = \frac{AC}{KC} = 4$.

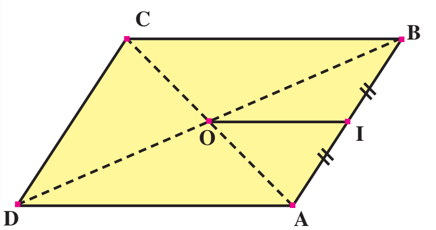
Droite des milieux

Activité 1

Dans la figure ci-contre ABCD est un parallélogramme de centre O.

1- Expliquer pourquoi (OI) et (AD) sont parallèles.

2- La droite (OI) coupe (CD) en J. Quelle est la position de J sur [CD]? Justifier.



Activité 2

Dans la figure ci-contre I est le milieu de [BC] et M le milieu de [AI].

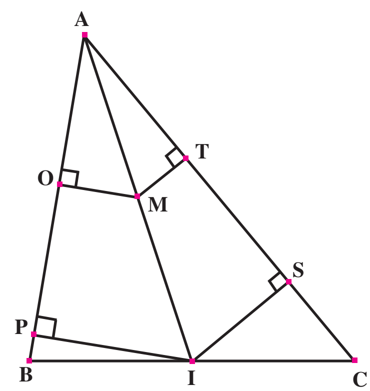
1- Montrer que O est le milieu de [AP].

2- Montrer que les droites (OT) et (PS) sont parallèles.

3- Soient M' le milieu de [AM], K le projeté orthogonal de M' sur (AB) et L le projeté orthogonal de M' sur (AC).

a) Montrer que les droites (KL) et (PS) sont parallèles.

b) Quelle est la proportion de l'aire du triangle AKL par rapport à l'aire du triangle APS?



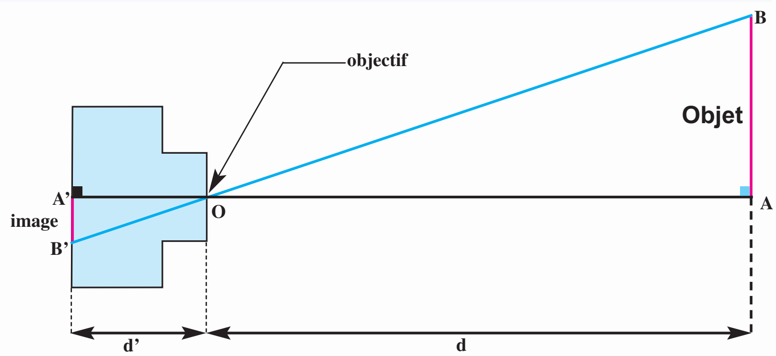
Théorème de Thalès

Activité 3

Voici un schéma de fonctionnement d'un appareil photographique

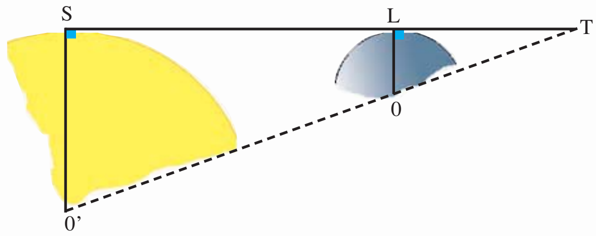
1- Exprimer $\dfrac{AB}{A'B'}$

en fonction de d et d'.



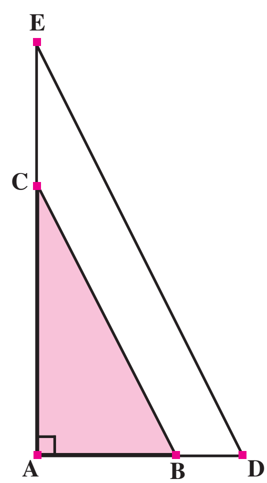
2- On suppose que d = 10 m, d' = 5cm et la hauteur de l'objet est 4m. Quelle est la hauteur de l'image qui se forme sur la pellicule ?

Activité 4 Une personne observe une éclipse du soleil. On modélise cette situation par la figure ci-contre. L'observateur est en T. Les points O et O' centres respectifs de la lune et du soleil sont alignés avec le point T.



On a O'S = 700000km, OL = 1736km, TO'=150millions km. Calculer TO et donner l'arrondi du résultat au kilomètre.

Activité 5 Dans la figure ci-contre AB = 2, AD = 3, AC = 4 et les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

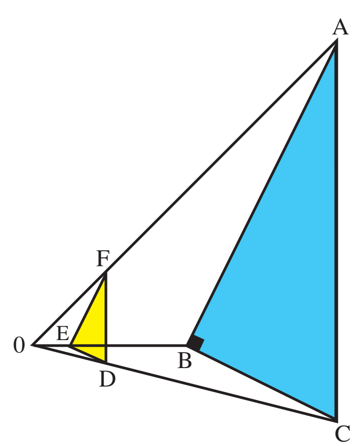


1- Montrer que le triangle ADE est un agrandissement du triangle ABC à une certaine échelle que l'on déterminera.

2- a) Quelle est la proportion du périmètre de ADE par rapport au périmètre de ABC ?

b) Quelle est la proportion de l'aire de ADE par rapport à l'aire de ABC ?

Activité 6 Dans la figure ci-contre les droites (AB) et (EF) sont parallèles, les droites (BC) et (ED) sont parallèles, OE=1cm, EB=3cm et l'aire de ABC est égale à 18cm^2.



1- Montrer que le triangle EFD est rectangle en E.

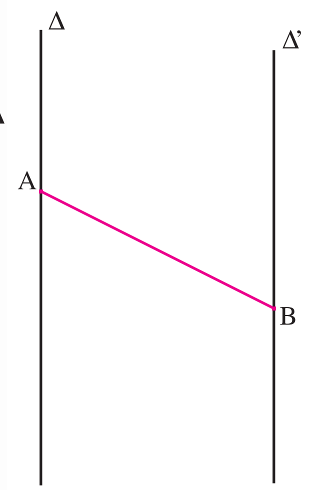
2- a) Exprimer EF en fonction de AB.

b) Exprimer ED en fonction de BC.

c) Exprimer FD en fonction de AC.

3- Calculer l'aire du triangle EFD.

Activité 7 Dans la figure ci-contre les droites Δ et Δ' sont parallèles. Soit M un point de [AB].
Une droite D passant par M et non parallèle à Δ coupe Δ en A' et Δ' en B'.



1- Evaluer le rapport $\dfrac{AA'}{BB'}$ dans chacun des cas suivants

a- M est le milieu de [AB].

b- $AM = \dfrac{1}{3}$ AB.

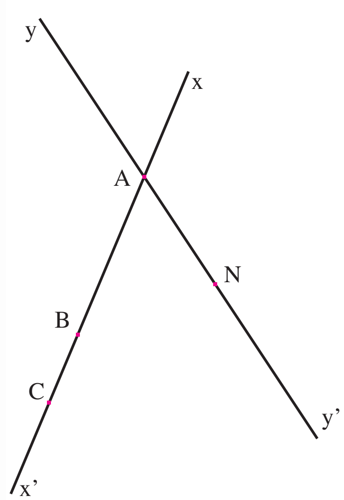
2- Déterminer la position de M sur [AB]

sachant que $\dfrac{AA'}{BB'} = \dfrac{1}{3}$.

Réciproque du théorème de Thalès

Activité 8

Dans la figure ci-contre, les droites (xx') et (yy') sont sécantes en A.
Le point B appartient au segment [AC], le point N appartient à la demi-droite [Ay') et est distinct de A.



1- Soit M le point de la demi-droite [Ny') tel que les droites (CM) et (BN) soient parallèles.

Que peut-on dire des rapports $\dfrac{AC}{AB}$ et $\dfrac{AM}{AN}$?

2- Soit M' un point appartenant à la demi-droite [Ny') distinct de N tel que les droites (CM') et (BN) ne sont pas parallèles.

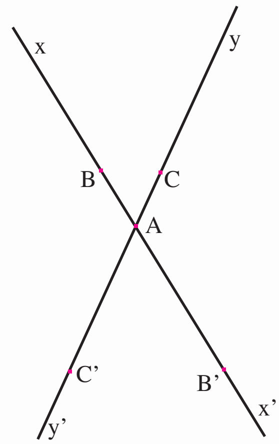
Montrer que l'on a $\dfrac{AC}{AB} > \dfrac{AM'}{AN}$ *ou* $\dfrac{AC}{AB} < \dfrac{AM'}{AN}$.

3- Conclure.

Activité 9

Dans la figure ci-contre,
les droites (xx') et (yy') sont sécantes en A

et on a $\frac{AC}{AC'} = \frac{AB}{AB'}$.

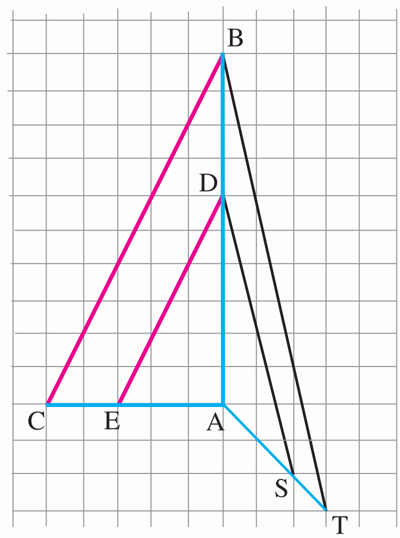


1- Placer les points I et J symétriques respectifs de C et B par rapport A.
Montrer que (IJ) et (BC) sont parallèles.

2- En déduire que (BC) et (B'C') sont parallèles.

Activité 10

Observer la figure ci-contre.

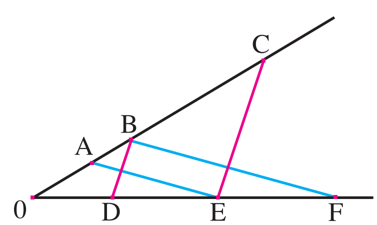


1- Les droites (DE) et (BC) sont-elles parallèles ?

2- Les droites (DS) et (BT) sont-elles parallèles ?

Activité 11

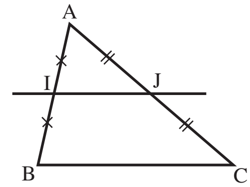
On considère la figure ci-contre où (AE) est parallèle à (BF) et (BD) est parallèle à (CE).
Montrer que les droites (AD) et (CF) sont parallèles.



Retenir

Droite des milieux

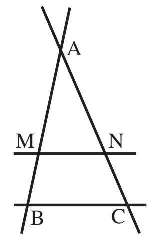
◊ Dans un triangle la droite joignant les milieux des deux côtés est parallèle au troisième côté.
Dans un triangle, la droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un deuxième côté coupe le troisième côté en son milieu.



Théorème de Thalès dans un triangle

◊ Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A, M un point de (AB) et N un point de (AC).
Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors

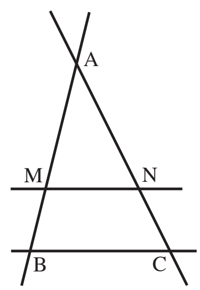
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$



Réciproque du théorème de Thalès

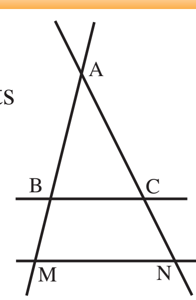
◊ Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A.
Soient M un point de [AB] et N un point de [AC] tous deux distincts de A.

Si $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$ alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.



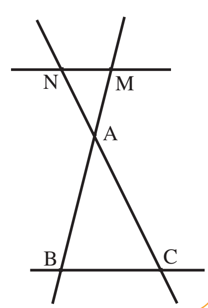
Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A.
Soient M un point de (AB) et N un point de (AC) tous deux distincts de A et tels que B appartient à [AM] et C appartient à [AN].

si $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$ alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.



Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A.
Soient M un point de (AB) et N un point de (AC) tous deux distincts de A tels que A appartient à [BM] et A appartient à [CN].

Si $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$ alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

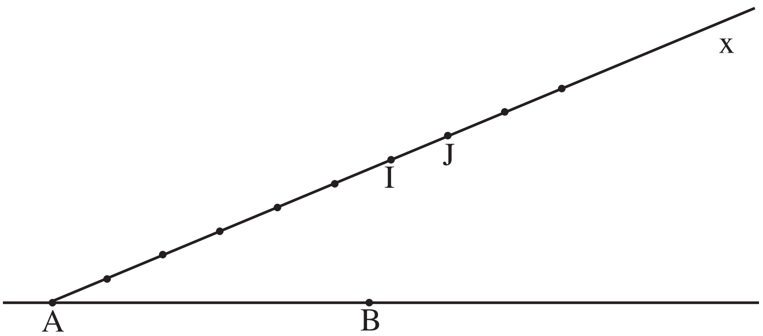


Mobiliser ses compétences

Utiliser le théorème de Thalès et sa réciproque pour construire un segment de longueur donnée

Situation 1

Utiliser la figure ci-contre pour placer sur (AB) un point M tel que $AM = \frac{7}{6} AB$. Expliquer.



Situation 2

Etant donné deux points distincts A et B, donner un procédé de construction pour placer un point N sur (AB) tel que $AN = \frac{5}{11} AB$.

Situation 3

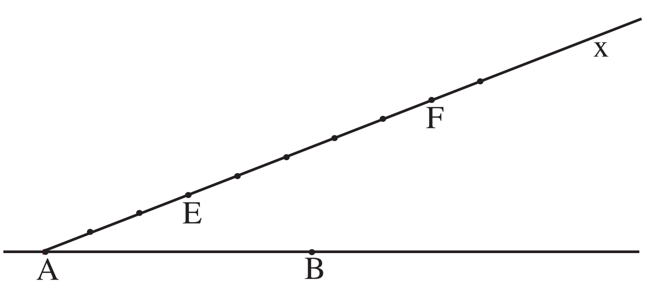
Donner un procédé de construction d'un segment de longueur d tel que $\frac{9}{7} = \frac{5}{d}$.

Utiliser le théorème de Thalès et sa réciproque pour partager un segment dans une proportion donnée

Situation

Utiliser la figure ci-contre pour placer sur le segment [AB] un point P tel que

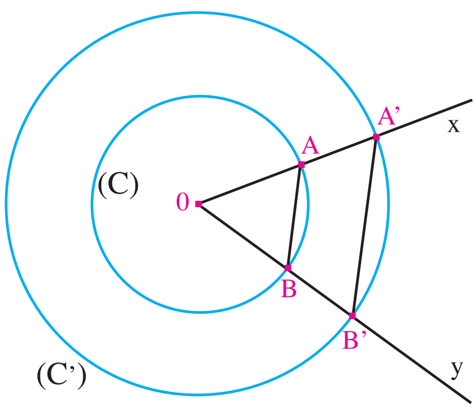
$$\frac{PA}{PB} = \frac{3}{5}.$$



Pour montrer que deux droites sont parallèles

Situation

On considère deux cercles concentriques (C) et (C') de centre O et de rayons respectifs R et R'. Une demi-droite [O x) coupe (C) en A et (C') en A'. Une autre demi-droite [O y) coupe (C) en B et (C') en B'.

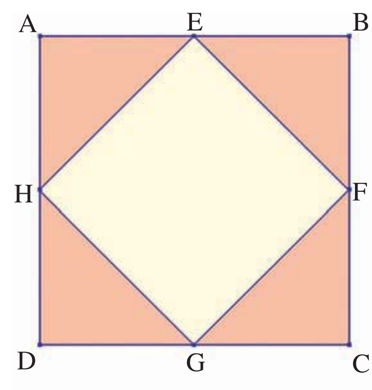


Montrer que les droites (AB) et (A'B') sont parallèles.
Stratégie de résolution
Penser à la réciproque du théorème de Thalès.

Réduction – Agrandissement

Situation 1

Observer la figure qui suit où ABCD et EFGH sont deux carrés et E, F, G et H sont les milieux des côtés de ABCD.



On désigne par a et a' les aires respectives des carrés ABCD et EFGH.

1- a) Sans faire de calculs évaluer le rapport $\frac{a'}{a}$.

   b) En déduire l'échelle de réduction k du carré ABCD au carré EFGH.

   c) Quelle est la proportion du périmètre de EFGH par rapport au périmètre de ABCD?

2- Reproduire la figure et la continuer en marquant les points I , J , K et L milieux des côtés de EFGH.

3- Continuer le procédé jusqu' à l'obtention d'un $4^{ème}$ carré MNPQ.

   a) Le carré ABCD est un agrandissement du carré MNPQ à une certaine échelle. Déterminer cette échelle.

   b) Quelle est la proportion de l'aire de ABCD par rapport à l'aire de MNPQ ?

Stratégie de résolution

1- Penser à la droite des milieux.

3- Le carré ABCD est un agrandissement du carré EFGH à l'échelle $\frac{1}{k}$.

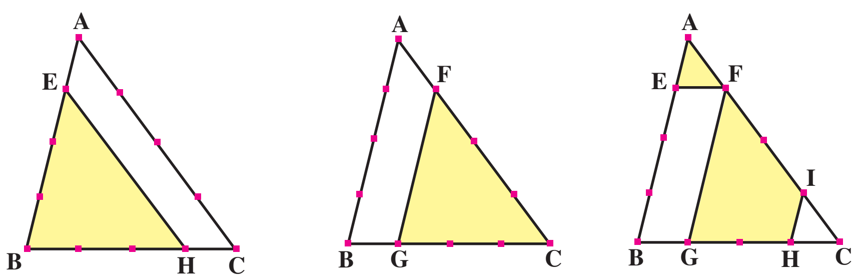
Le carré EFGH est un agrandissement du carré IJKL à l'échelle $\frac{1}{k}$.

Le carré IJKL est un agrandissement du carré MNPQ à l'échelle $\frac{1}{k}$.

Conclure.

Situation 2

On a partagé chacun des côtés d'un triangle ABC en quatre segments isométriques.
Voici ci- dessous trois dessins de ce triangle.



dessin 1 dessin 2 dessin 3

Montrer que les parties colorées en jaune de chaque dessin ont même aire.

Stratégie de résolution
Comparer les aires des parties colorées en jaune des dessins 1 et 2 en utilisant une situation de Thalès.

Remarquer dans le dessin 3 que les aires des triangles AEF et CIH sont égales.

Conclure.

S'auto-évaluer

Vrai ou Faux

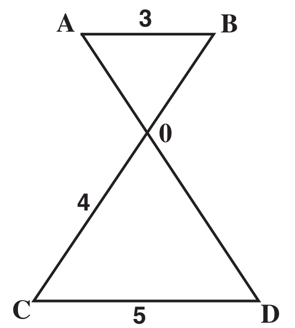
Répondre par vrai ou faux.

1- a) $OB = \frac{12}{5}$.

b) 5 OA = 2OD.

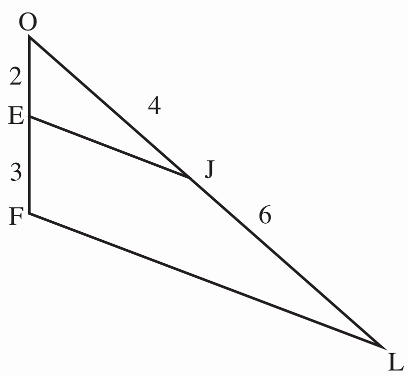
c) O est le milieu de [BC].

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



2- a) Les droites (JE) et (LF) sont parallèles.

b) La proportion de l'aire de OEJ par rapport à l'aire de OFL est égale à $\frac{2}{5}$.



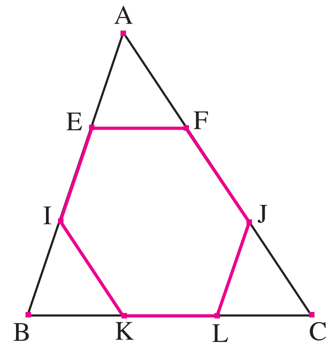
Recopier et compléter

On a partagé chacun des côtés d'un triangle ABC en trois segments isométriques.

a) $\frac{EF}{BC} = ...$

b) Comparer EF et KL.

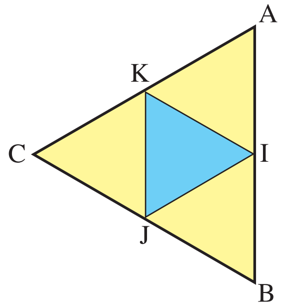
c) Le périmètre de EFJLKI est égal aux... du périmètre de ABC.



Exercices et problèmes

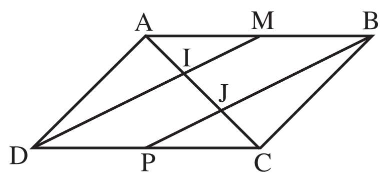
Appliquer

1 ABC est un triangle équilatéral de côté 3cm. I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [AC].



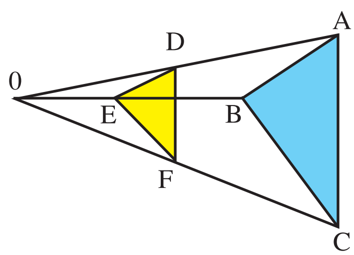
1- Montrer que IJK est un triangle équilatéral.
2- Calculer le périmètre et l'aire de IJK.

2 ABCD est un parallélogramme.



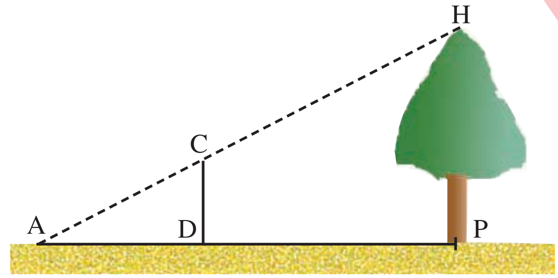
Les points M et P sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].
1- Montrer que les droites (MD) et (PB) sont parallèles.
2- La droite (AC) coupe les droites (MD) et (PB) respectivement en I et J.
Comparer AI, IJ et JC ?

3 Observer la figure ci-contre où la droite (DE) est parallèle à la droite (AB) et la droite (FE) est parallèle à la droite (BC),

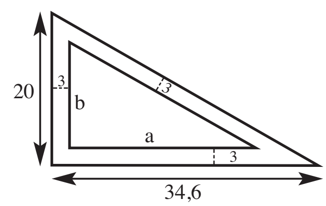


OE=EB=3cm, l'aire de EDF est 5cm².
1- Quelle est la position relative des droites (DF) et (AC) ?
2- Calculer l'aire de ABC.

4 L'ombre du sommet H de l'arbre est en A. On place verticalement en D un bâton tel que l'ombre du point C soit en A.
On donne de plus AP = 15m, AD = 1,2m et DC = 0,8m.
Quelle est la hauteur PH de l'arbre ?

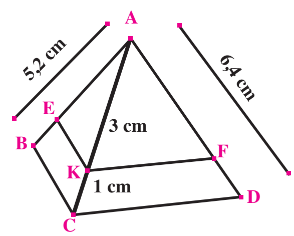


5 Le dessin ci-contre représente une équerre.



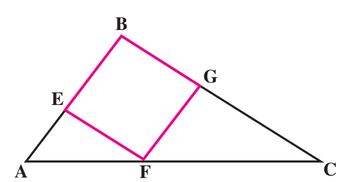
Le rapport $\frac{a}{b}$ est-il égal à $\frac{34,6}{20}$?

6 Dans la figure ci- contre (KE) et (BC) sont parallèles. (KF) et (DC) sont parallèles.



AK = 3cm ,
KC = 1cm, AB = 5,2 cm et AD = 6,4cm.
1- Calculer AE et AF.
2- Montrer que les droites (EF) et (BD) sont parallèles.

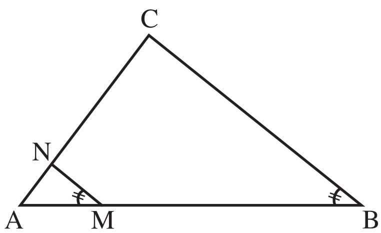
7 La figure ci-dessous représente un triangle ABC tel que
AB = 4cm,
BC = 6cm,
AC = 7,5 cm et
BE = 2,4cm.



(EF) est parallèle à (BC) et (FG) est parallèle à (AB).
Montrer que le quadrilatère EFGB est un losange.

8 Dans la figure ci-dessous,

AM=2cm
MB=6cm et
AC=5 cm.
Calculer AN.



9 ABC est un triangle.

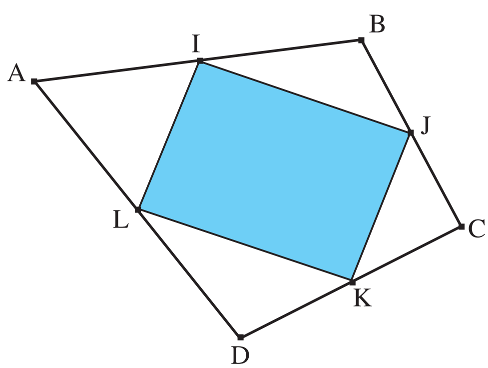
1-Construire le point D de [BC] tel que

$$\frac{DB}{DC} = \frac{1}{2}.$$

Donner l'abscisse de D dans le repère (B, C).
2- La parallèle à (AC) passant par D coupe (AB) en F. La parallèle à (AB) passant par D coupe (AC) en E.
Evaluer chacun des rapports $\frac{AF}{AB}$ et $\frac{AE}{AC}$.

Maîtriser

10 Dans la figure ci-dessous I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].
Montrer que IJKL est un parallélogramme.

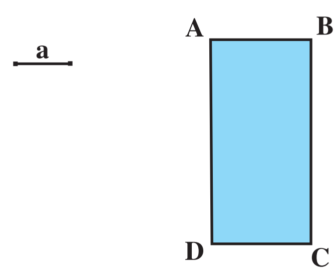


11 Soit ABC un triangle isocèle en A tel que AC=5cm et BC=6cm. Soit M un point de [BC] tel que CM=1cm. La perpendiculaire à (BC) passant par M coupe (AC) en N.
1- Calculer le périmètre du triangle CMN.
2- Calculer l'aire du triangle CMN.

12 A et C sont deux points tels que AC=6cm et B est un point de [AC] tel que AB=4cm.
1- Construire (C_1) le cercle de diamètre [AB] et (C_2) le cercle de diamètre [BC].
2- Soit M un point de (C_1) tel que AM =1,5cm. La droite (BM) coupe (C_2) en N.
a) Montrer que les droites (AM) et (NC) sont parallèles.
b) Calculer CN et BN.

13 Dans la figure ci-dessous ABCD est un rectangle. On se propose de construire un deuxième rectangle de même aire que ABCD et dont l'un des côtés est égal à a.

1- Reproduire le rectangle ABCD et placer le point E de [AB] tel que AE = a.



2- La parallèle à (DE) passant par B coupe (AD) en G.

Soit F le point tel que AEFG est un rectangle.

Montrer que le rectangle AEFG est de même aire que le rectangle ABCD.

14 Sur une droite D munie d'un repère (O, I) on donne les points A, B et C d'abscisses respectives a, b et c avec a, b et c des réels strictement positifs.

1- a) Tracer une droite Δ sécante à D en O.
b) Soit (O, J) un repère de Δ tel que OI = OJ.

Placer le point N sur Δ d'abscisse c.

2- La parallèle à (BN) passant par A coupe Δ en M.

a) Calculer $\frac{ON}{OM}$.

b) Déduire un segment de longueur $\frac{ac}{b}$.

15 Soit (D) et (D') deux droites perpendiculaires en O. Placer un point B sur (D) puis un point C sur (D') tels que BC = 5cm.

1- La construction est-elle toujours possible ? Expliquer.

2- Lorsque la construction du point C est possible, on note I le milieu de [BC].

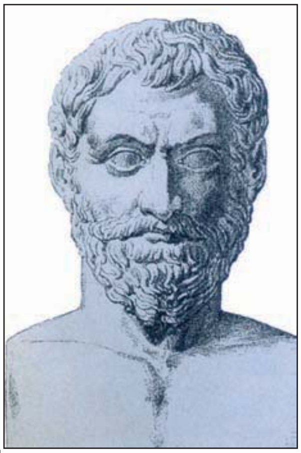
a) Calculer OI et en déduire sur quelle ligne fixe se déplace I lorsque le point B varie sur (D).

b) La parallèle à (D') passant par B coupe (OI) en G. Calculer OG et en déduire sur quelle ligne fixe se déplace le point G lorsque B varie sur (D).

Avec l'ordinateur

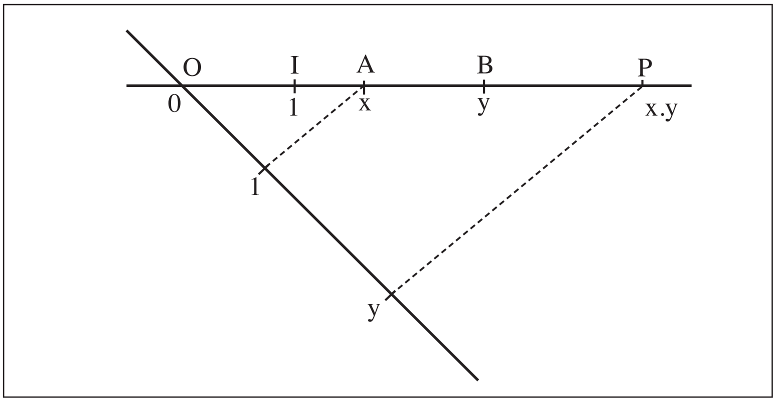
A l'aide d'un logiciel :
- Tracer une droite (D) et placer un point A de (D) et un point O n'appartenant pas à (D).
- Construire C le milieu du segment [OA].
- Construire B le milieu du segment [OC].
- Tracer la parallèle à la droite (D) passant par B.
- Placer un point M sur (D) puis construire le point N du segment [OM] tel que $ON = \frac{1}{4}OM$.
- Déplacer le point M sur (D).
- Que remarque-t-on? Justifier.

Math - Culture



THALÈS vécut autour des années 600 avant J.C. sur la côte d'Asie Mineure. On lui attribue l'invention de la Petite Ourse, la prédiction d'une éclipse (en 385) et les fondements de la géométrie.
Avec un simple bâton placé au bout de l'ombre de la pyramide de Chéops il mesure la hauteur de cette pyramide. Ce qui témoigne de la puissance des mathématiques.

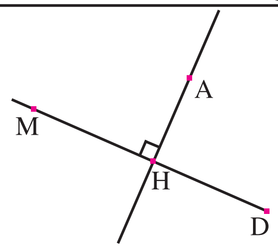
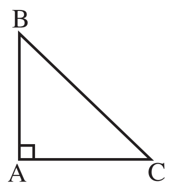
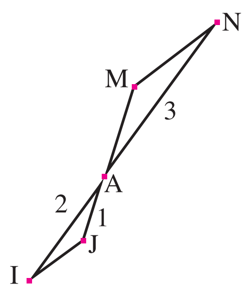
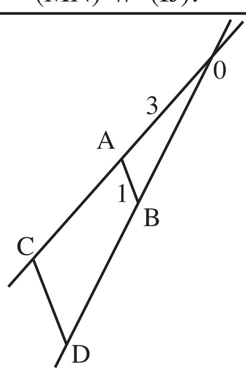
Sur une droite graduée sont placés les points A et B d'abscisses respectives x et y.
Voici comment Descartes applique le théorème de Thalès pour placer le point P d'abscisse x.y. Justifier



Chapitre 3 RAPPORTS TRIGONOMETRIQUES D'UN ANGLE AIGU. RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

Reprendre

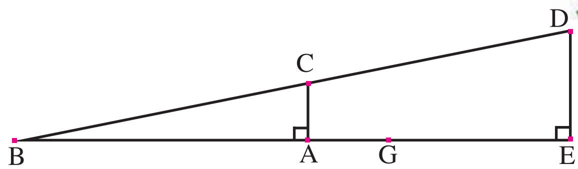
Pour chaque énoncé, on propose trois réponses A, B et C. Une ou plusieurs sont correctes. Lesquelles ?

Réponses / Enoncés	**A**	B	C
	La distance du point A à la droite D est égale à AH.	$AH < AM$.	M est équidistant de A et H.
	ABC est un triangle équilatéral.	Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont complémentaires.	$BC^2 = AB^2 + AC^2$.
 (MN) // (IJ).	$AM = 4$.	$AM = \frac{3}{2}$.	$\widehat{IJA} = \widehat{AMN}$.
 (AB) // (CD).	$OC = 3OA$.	$OC = 3CD$.	$OD = 3CD$.

Rapports trigonométriques d'un angle aigu

Activité 1 **Explorer une pente**

Un cycliste roule sur une côte dont la pente est 20%.
Il part d'un point B au niveau de l'horizontale et passe par les points C et D.
La figure suivante modélise le parcours du cycliste à l'échelle 1/50 000 sachant que la distance parcourue est mesurée en kilomètres.



1- Mesurer BC et en déduire la distance parcourue par le cycliste lorsqu'il passe par le point C.

2- a) Mesurer AC et en déduire l'altitude à laquelle se trouve le cycliste lorsqu'il est au point C.
Donner une valeur approchée de AC à 10^{-1} près.
b) Faire des mesures analogues lorsque le cycliste est au point D.

3- a) Expliquer pourquoi $\frac{AC}{AB} = \frac{DE}{BE}$.

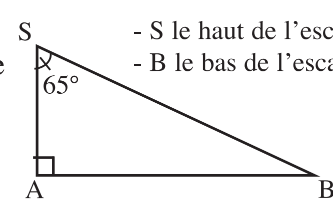
b) Le cycliste passe par le point F tel que G est le projeté orthogonal de F sur (AB).
Sachant que FG = 1cm et BG = 5cm, donner la valeur exacte du rapport $\frac{AC}{AB}$.

c) On suppose que le cycliste se trouve à une altitude h égale à 200 m.
Donner une valeur de h à l'échelle 1/50 000.

4-On désigne par M une position du cycliste et par N le projeté orthogonal de M sur (AB).
Que vaut $\frac{MN}{BN}$? Faire le lien avec la pente 20%.

Activité 2 **Descendre un escalier**

Imène descend un escalier qui fait une inclinaison de 65° avec la verticale.
Lorsque Imène est en S, elle se trouve à une distance de 15m de B et à une altitude de 6,34m.
On désigne par M une position de Imène sur l'escalier et par H le projeté orthogonal de M sur (AB).



- S le haut de l'escalier
- B le bas de l'escalier

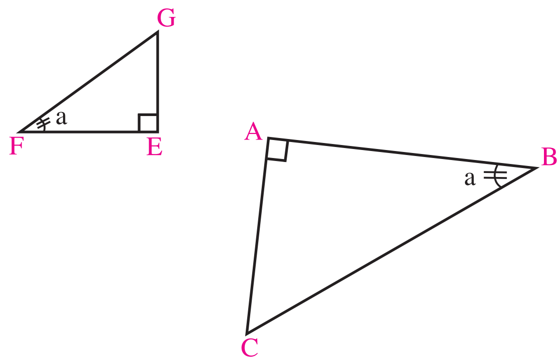
1- Recopier et compléter le tableau suivant :

MB en m	12		10		1
MH en m		4		0,5	

2- Vérifier que ce tableau est un tableau de proportionnalité et donner son coefficient de proportionnalité.

Activité 3

La figure ci-contre représente deux triangles ABC et EFG rectangles respectivement en A et E tels que $\widehat{ABC} = \widehat{EFG} = a$.



1- Reproduire le triangle ABC puis placer sur [BA) le point M tel que BM = FE et placer sur [BC) le point N tel que BN = FG.

2- a) Montrer que les deux triangles BMN et FEG sont isométriques.

b) En déduire que la droite (MN) est parallèle à la droite (AC).

3- Montrer que $\frac{BA}{BC} = \frac{FE}{FG}$, $\frac{AC}{BC} = \frac{EG}{FG}$ et $\frac{AC}{AB} = \frac{EG}{EF}$.

Définition

ABC désigne un triangle rectangle en A.

- Le rapport $\frac{AB}{BC}$ s'appelle cosinus de l'angle aigu $\widehat{ABC}$.

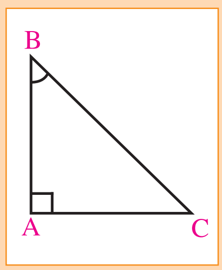
On le note $\cos \widehat{ABC}$.

- Le rapport $\frac{AC}{BC}$ s'appelle sinus de l'angle aigu $\widehat{ABC}$.

On le note $\sin \widehat{ABC}$.

- Le rapport $\frac{AC}{AB}$ s'appelle tangente de l'angle aigu $\widehat{ABC}$.

On le note $\tan \widehat{ABC}$.



$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$ $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$ $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$.

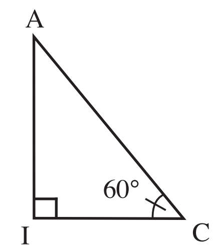
Avec des angles remarquables

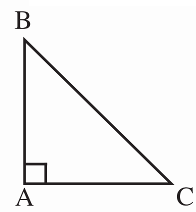
Activité 4

1- a) Construire un triangle AIC rectangle en I tel que $\widehat{ICA} = 60°$ et placer le point B symétrique de C par rapport à I.

b) Quelle est la nature du triangle ABC ?

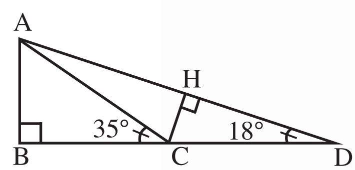
c) On pose AC = a , exprimer AI et CI en fonction de a.
d) En déduire sin 60°, cos 60°, tan 60° , sin 30 °, cos 30° et tan 30°.
2- ABC est un triangle rectangle et isocèle en A .
a) On pose AC = b, calculer BC en fonction de b.
b) En déduire sin 45°, cos 45° et tan 45°.





Avec la calculatrice

Activité 5



Observer la figure ci-contre où AB = 12.
1- Exprimer BC en fonction de tan 35°.
2- A l'aide de la calculatrice donner une valeur approchée à 10^{-1} près de BC.
3- Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de BD.
4- Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'aire du triangle ADC.
5- Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de CH.

Pour établir des relations trigonométriques

Activité 6

ABC est un triangle rectangle en A.
1- Vérifier que $\cos \widehat{B} = \sin \widehat{C}$ et $\sin \widehat{B} = \cos \widehat{C}$.
2- Vérifier que $\tan \widehat{B} = \dfrac{\sin \widehat{B}}{\cos \widehat{B}}$.
3- Montrer que $(\cos \widehat{B})^2 + (\sin \widehat{B})^2 = 1$.

Relations métriques dans un triangle rectangle

Activité 7

ABC est un triangle rectangle en A et [AH] est la hauteur issue de A.
1- Montrer que AB × AC = AH × BC.
2- Exprimer de deux manières $\cos \widehat{ACB}$ et en déduire que $AC^2 = CH \times CB$.
3- Vérifier que $\widehat{ACB} = \widehat{BAH}$ et en déduire que $AH^2 = BH \times CH$.

Retenir

Cosinus , sinus et tangente d'un angle aigu

◊ ABC désigne un triangle rectangle en A.

- Le rapport $\frac{AB}{BC}$ s'appelle cosinus de l'angle aigu $\widehat{ABC}$.

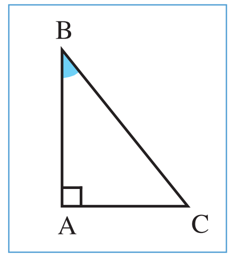
On le note cos $\widehat{ABC}$

- Le rapport $\frac{AC}{BC}$ s'appelle sinus de l'angle aigu $\widehat{ABC}$.

On le note sin $\widehat{ABC}$.

- Le rapport $\frac{AC}{AB}$ s'appelle tangente de l'angle aigu $\widehat{ABC}$.

On le note tan $\widehat{ABC}$.



$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$ $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$ $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$.

Relations trigonométriques

◊ Pour tout angle aigu a on a :

$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$

$(\sin a)^2 + (\cos a)^2 = 1$

Si deux angles sont complémentaires alors le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

Angles remarquables

Angle x	30°	45°	60°
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Utiliser la calculatrice

◊ Comme l'unité de mesure des angles est le degré, mettre la calculatrice sous DEG .

a) Pour donner une valeur approchée de cos 50° à 10^{-2} près,

on tape : cos 50 =

Il s'affiche : 0,642787609
On écrit : cos 50°≈ 0,64

b) Pour déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'angle aigu a tel que cos a = 0.4,

on tape : 2ndF cos 0.4 =

Il s'affiche : 66,42182152

On écrit : $a \approx 66{,}42°$

Relations métriques dans un triangle rectangle

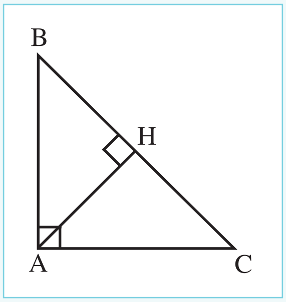
◊ ABC est un triangle rectangle en A et [AH] la hauteur issue de A. On a :

$AB \times AC = AH \times BC$.

$AB^2 + AC^2 = BC^2$.

$AH^2 = HB \times HC$.

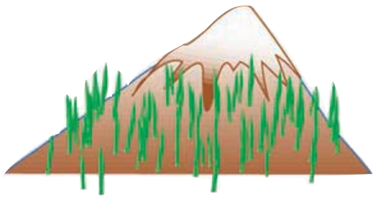
$AB^2 = BH \times BC$ et $AC^2 = CH \times CB$.



Modéliser

Situation 1

Du sommet S d'une montagne, on observe un endroit A sous un angle de dépression de 35° et un endroit B qui est situé à 2500 mètres de l'endroit A sous un angle de 55°. Mesurer la hauteur de cette montagne.



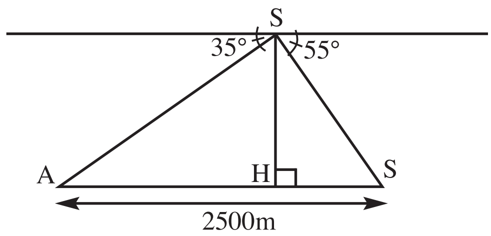
Stratégie de résolution

La figure ci-contre modélise la situation. Le but du problème est de calculer SH, tel que H est le projeté orthogonal de S sur (AB). On pose AH = a.

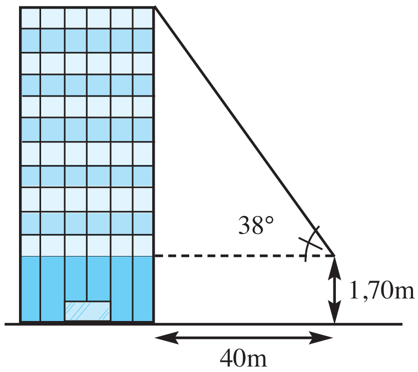
On a SH = a tan35°

et SH = (2500 - a) tan 55°.

On détermine a puis on en déduit SH.



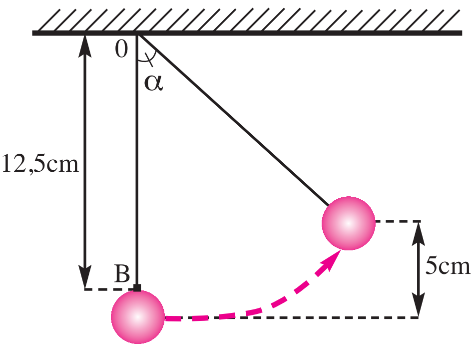
Situation 2



Un observateur est placé à 40 mètres d'une tour. Il voit son sommet sous un angle de 38° et il veut trouver la hauteur de la tour. Elaborer une stratégie de résolution puis calculer une valeur approchée de cette hauteur à 10^{-2} près.

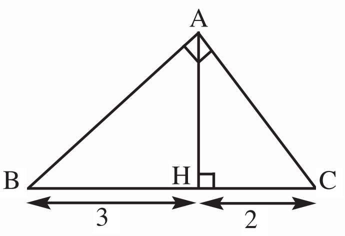
Situation 3

Un pendule est constitué d'une boule reliée à l'une des extrémités d'un fil de longueur 12,5cm. Lorsqu'on écarte le pendule d'un angle α de sa position verticale [OB], l'élévation de la boule par rapport à l'horizontale est de 5cm. Elaborer une stratégie de résolution pour calculer α puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.



Construire un segment de longueur $\sqrt{a.b}$

Situation 1



Construire un segment de longueur $\sqrt{6}$.
Stratégie de résolution
Observer la figure ci-contre puis calculer AH.

Situation 2

Etant donnés deux segments de longueurs respectives a et b, donner les étapes de construction d'un segment de longueur $\sqrt{ab}$.

Construire un angle aigu connaissant son sinus, son cosinus ou sa tangente

Situation 1

Construire un angle aigu dont le sinus est égal à 0,38.
Stratégie de résolution
On sait que dans un triangle rectangle, le sinus de l'un de ses angles aigus est le quotient du côté opposé à cet angle par l'hypoténuse.
D'autre part on peut écrire $0{,}38 = \dfrac{19}{50}$.

Soit alors un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 19mm et BC = 50mm.

Vérifier que l'angle $\widehat{ACB}$ répond à la question.

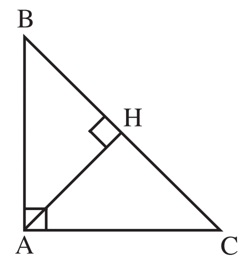
Situation 2

Construire un angle aigu dont le cosinus est égal à $\dfrac{1}{3}$.

Situation 3

Construire un angle aigu dont la tangente est égale à 5.

Observer



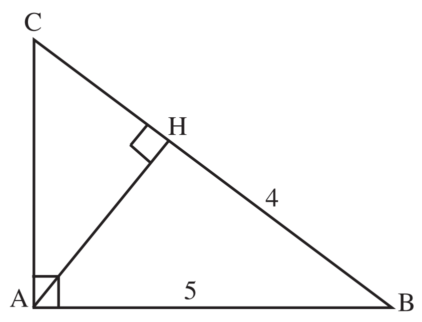
ABC est un triangle rectangle en A
et [AH] est la hauteur issue de A.

Ecrire sous forme de rapports le sinus, le cosinus et la tangente de chacun des angles aigus de la figure.

Vrai ou faux

ABC est un triangle rectangle en A, tel que AB = 5,
[AH] est la hauteur issue de A et BH = 4.
Répondre par vrai ou faux.

a) AH = 3.
b) cos $\widehat{B}$ = 4/5.
c) sin $\widehat{B}$ = 3/5.
d) tan $\widehat{B}$ = 4/3.
e) AC = 5 tan $\widehat{B}$.
f) BC = AB + AC.



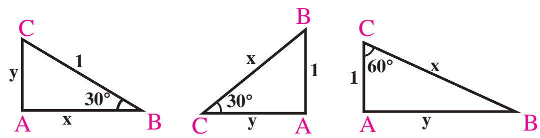
Compléter

AHO est un triangle rectangle en O. Recopier et compléter le tableau suivant par des valeurs approchées à 0,1 près :

$\widehat{A}$	$\widehat{H}$	AO	OH	HA
34°				7
	25°		6	
			7,5	14
		3	15	

Appliquer

1 Déterminer dans chacun des cas suivants x et y sachant que le triangle ABC est rectangle en A.



1er cas 2ème cas 3ème cas

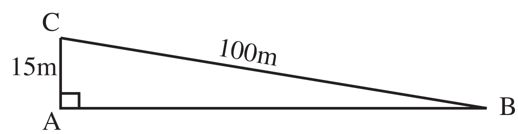
2 STP est un triangle rectangle en S et [SO] est une hauteur.
Recopier et compléter le tableau par des valeurs approchées à 0,1 près des grandeurs demandées.

$\widehat{T}$	$\widehat{P}$	ST	SP	TP	OS	OT	OP
36°				12			
	25°	7					
50°					9,5		

3 Soit ABC un triangle isocèle en A tel que AB = 5cm et BC = 9cm.
a) Déterminer cos$\widehat{B}$.
b) Donner une valeur approchée de $\widehat{B}$ à 0,01 près.
c) Donner une valeur approchée de l'aire de ABC à 0,01 près.

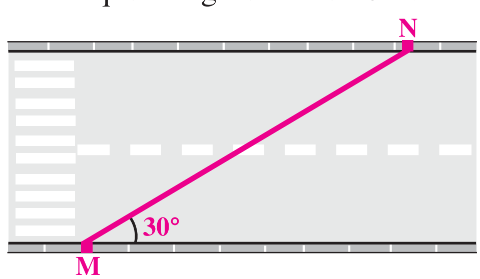
4 Soit un losange ABCD et I son centre, AB = 3cm et $\widehat{ABC}$ = 62°.
a) Déterminer une valeur approchée de BI et AI à 10^{-3} près.
b) Déduire une valeur approchée de l'aire de ABCD.

5 Sur une route, un panneau annonce une descente de 15% c'est à dire «sur un parcours de 100m, l'altitude baisse de 15m». La figure ci-dessous modélise cette situation.



a) Combien mesure l'angle $\widehat{B}$?
b) La figure ci-dessus modélise aussi la montée d'un coureur sur une côte (le point de départ est matérialisé par le point B).
Trouver une valeur approchée de la pente de cette côte.

6 Un piéton distrait traverse une chaussée de largeur 12m comme l'indique la figure ci- dessous.



Quelle distance a-t-il parcourue ?

Maîtriser

7 1- Construire un angle aigu $\widehat{xOy}$ tel que sin $\widehat{xOy} = \frac{2}{3}$.

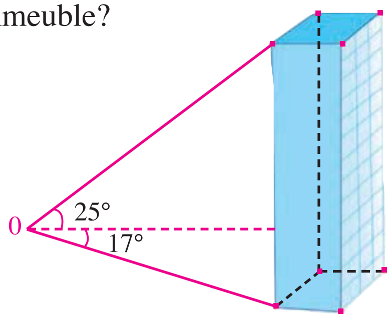
Donner les étapes de construction.
2- Construire un angle aigu $\widehat{zFw}$ tel que cos $\widehat{zFw}$ = 0,35.
3- Construire un angle aigu $\widehat{uAv}$ tel que tan $\widehat{uAv}$ = 4,2.

8 EFG désigne un triangle rectangle en E tel que FG = 4EF. Soit H le pied de la hauteur issue de E.
Montrer que HF = $\frac{1}{16}$ FG.

9 Etant donné un rectangle de côtés a et b, élaborer une stratégie de construction d'un carré de même aire.

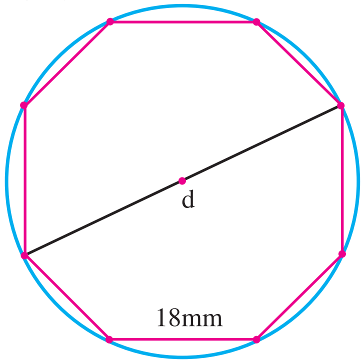
10 On considère un rectangle ABCD et les points E et F appartenant respectivement aux segments [AB] et [EC], EB = ED = 10cm , $\widehat{CEB} = 37°$ et $\widehat{BFE} = 90°$.
1- Elaborer une stratégie de construction de cette figure.
2- Construire cette figure et calculer EF, BC et sin $\widehat{AED}$.
3- Donner une valeur approchée à 0.1 près de l'aire du triangle DEC.

11 Un observateur O placé à 20m d'un immeuble voit le point le plus haut de cet immeuble sous un angle de 25° et le point le plus bas sous un angle de 17°. Quelle est la hauteur de cet immeuble?

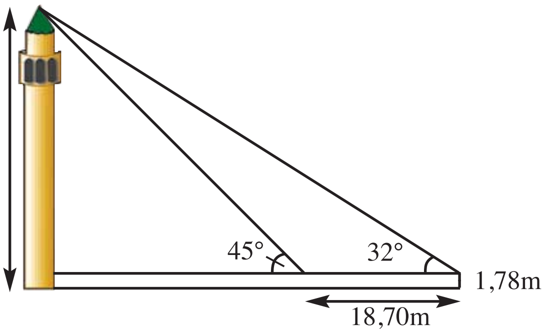


12 STO est un triangle tel que
ST = 3cm, SO = $\sqrt{3}$ et OT = $2\sqrt{3}$.
1- a) Montrer que STO est rectangle en S.
b) Calculer tan $\widehat{SOT}$ puis déduire l'angle $\widehat{SOT}$.
2- Soit H le projeté orthogonal de S sur (OT). Montrer que SH = $\frac{3}{2}$.
3- La perpendiculaire à (OT) passant par T coupe (OS) en D.
Calculer les angles du triangle DST puis calculer TD et DS.

13 La figure ci-dessous représente un octogone régulier de côté 18mm inscrit dans un cercle de diamètre d.
Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de d.

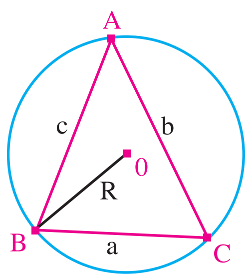


14 Un géomètre veut calculer la hauteur d'un minaret qui se trouve de l'autre côté d'un oued. Observer la figure modélisant la situation et calculer la hauteur L de ce minaret.



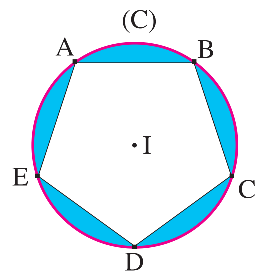
15 ABC est un triangle tel que les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont aigus.
On pose BC = a, AB = c et AC = b.
On désigne par H le projeté orthogonal de B sur (AC).
On se propose d'établir la relation
$b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} = a^2$.
1- Exprimer AH à l'aide de $\cos\widehat{A}$.
2- Exprimer BH à l'aide de a, b et AH.
3- En déduire que
$b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} = a^2$.

16 ABC est un triangle. On pose BC = a, AB = c, AC = b, R le rayon de son cercle circonscrit et S la mesure de l'aire de ABC.



On se propose d'établir la relation
4RS = abc.
a) Tracer la hauteur [BH]. Exprimer BH en fonction de c et $\sin\widehat{A}$. Exprimer S en fonction de b, c et $\sin\widehat{A}$.
Déduire une expression de $\sin\widehat{A}$.
b) Marquer I milieu de [BC] et montrer que $\widehat{BOI} = \widehat{A}$.
Exprimer $\sin\widehat{A}$ en fonction de a et R.
c) Déduire de ce qui précède
la relation 4RS = abc.

17 La figure qui suit représente un pentagone régulier ABCDE inscrit dans un cercle (C) de centre I et de rayon 3cm.



1- Reproduire ce dessin.
2- Donner une valeur approchée à 0.1 près de [AB].
3- Donner une valeur approchée à 0.1 près de l'aire de la partie colorée.

18 ABC est un triangle tel que I est le milieu de [BC], AB = 5, BC = 6.5 et $\widehat{BAI} = 30°$.
a) Montrer que l'aire du triangle ABC est le double de l'aire du triangle ABI.
b) Calculer l'aire de ABC.

19 Un terrain a la forme d'un trapèze ABCD rectangle en A et D.
On suppose que AB = 20m,
AD = 30m et que l'aire du terrain est égale à $540m^2$.
1- Calculer une valeur approchée du périmètre de ce terrain au dm près.
2- Donner une valeur approchée de l'angle $\widehat{DCB}$.

Avec l'ordinateur

A l'aide d'un logiciel :

- Construire un segment [AB]
- Placer un point C n'appartenant pas à la droite (AB).
- Construire D le symétrique de A par rapport à C puis E le symétrique de C par rapport à D.
- Construire la parallèle à la droite (EB) passant par C. Cette parallèle coupe (AB) en K.
- Construire le cercle (C) de centre A et de rayon AK.

La perpendiculaire à la droite (AB) en A coupe le cercle (C) en I et J.

Expliquer pourquoi $\sin \widehat{ABI} = \sin \widehat{ABJ} = \frac{1}{3}$.

Math - Culture

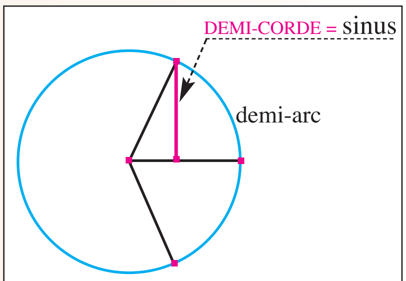
LES TABLES TRIGONOMETRIQUES

Avant l'avénement des calculatrices les élèves et les ingénieurs utilisaient des tables pour déterminer les rapports trigonométiques d'un angle.
Les premières tables ont été dressées par les mathématiciens arabes.
Abul-Wafa (en l'an 980) calcula les différentes valeurs inscrites dans les tables.
Puis ce fut l'époque de Nasir Ed-dine Al Tusi qui écrivit le premier traité de trigonométrie.

$a°$	$\sin(a°)$	$\tan(a°)$	$1/\tan(a°)$	$\cos(a°)$	
0	0.0000	0.0000		1.0000	90
1	0.0175	0.0175	57.290	0.9998	89
2	0.0349	0.0349	28.636	0.9994	88
3	0.0523	0.0524	19.081	0.9986	87
4	0.0698	0.0699	14.300	0.9976	86
5	0.0872	0.0875	11.430	0.9962	85
6	0.1045	0.1051	9.514	0.9945	84
7	0.1219	0.1228	8.144	0.9925	83
8	0.1392	0.1405	7.115	0.9903	82
9	0.1564	0.1584	6.314	0.9877	81
10	0.1736	0.1763	5.671	0.9848	80
11	0.1908	0.1944	5.145	0.9816	79
12	0.2079	0.2126	4.705	0.9781	78
13	0.2250	0.2309	4.331	0.9744	77
14	0.2419	0.2493	4.011	0.9703	76
⋮					⋮
40	0.6428	0.8391	1.192	0.7660	50
41	0.6561	0.8693	1.150	0.7547	49
42	0.6691	0.9004	1.111	0.7431	48
43	0.6820	0.9325	1.072	0.7314	47
44	0.6947	0.9657	1.036	0.7193	46
45	0.7071	1.0000	1.000	0.7071	45
	$\cos(a°)$	$1\ \tan(a°)$	$\tan(a°)$	$\sin(a°)$	$(a°)$

Le sinus

Comme leurs prédécesseurs, (grecs, hindous, chinois, égyptiens), les arabes s'intéressaient à la trigonométrie à cause de son utilité dans la résolution de problèmes relatifs à l'astronomie.
La fonction la plus évidente et la plus naturelle pour les premiers astronomes était reliée à la mesure de la corde correspondant à un arc de cercle.
Le sinus est la demi-corde. L'appellation vient de l'arabe : jeib (poche, repli de vêtement).

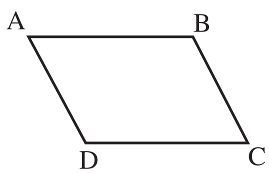
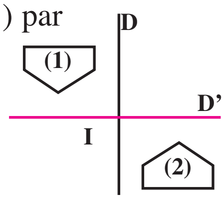
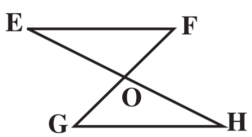
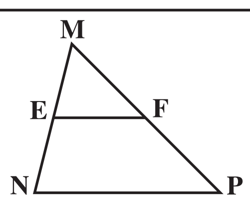


Al Kawarizmi fut le premier mathématicien arabe à établir des tables de sinus.

Chapitre 4 Vecteurs et translations

Reprendre

Pour chaque énoncé, on propose trois réponses A, B et C. Une ou plusieurs réponses sont correctes. Lesquelles ?

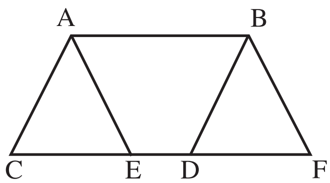
Réponses **Enoncés**	**A**	**B**	**C**
 Si ABCD est un parallélogramme alors	[AC] et [BD] ont le même milieu.	AB = CD.	$A\widehat{B}C = C\widehat{D}A$.
La figure (2) est l'image de la figure (1) par 	la symétrie axiale d'axe D.	la symétrie axiale d'axe D'.	la symétrie centrale de centre I.
 Si OFE et OGH sont symétriques par rapport à O alors	EFGH est un parallélogramme.	[EF] et [GH] sont isométriques.	EG = FH.
 Si E est le milieu de [MN] et F est le milieu de [MP] alors	la droite (EF) est parallèle à la droite (NP).	l'aire du triangle MNP est le double de celle du triangle MEF.	$M\widehat{E}F = M\widehat{N}P$.

Vecteurs

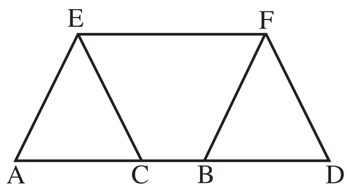
Activité 1

Dans cette activité on se propose de démontrer que si les segments [AD] et [BC] ont le même milieu et si les segments [AF] et [BE] ont le même milieu alors les segments [CF] et [DE] ont le même milieu.

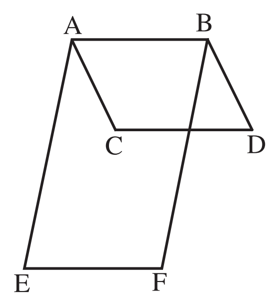
1- Dans la figure ci-contre, les segments [AD] et [BC] ont le même milieu, les segments [AF] et [BE] ont le même milieu.
Montrer que les segments [CF] et [DE] ont le même milieu.



2- Dans la figure ci-contre les segments [AD] et [BC] ont le même milieu. Les segments [AF] et [BE] ont le même milieu.
a) Montrer que les triangles ACE et BDF sont isométriques.
b) Montrer que les segments [CF] et [DE] ont le même milieu.



3- Dans la figure ci-contre, les segments [AD] et [BC] ont le même milieu, les segments [AF] et [BE] ont le même milieu.
a) Montrer que les triangles ACE et BDF sont isométriques.
b) Montrer que les segments [CF] et [DE] ont le même milieu.



Définition
Lorsque deux bipoints (A, B) et (C, D) sont tels que les segments [AD] et [BC] ont le même milieu alors ces bipoints représentent un même objet mathématique appelé vecteur et noté $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{CD}$.

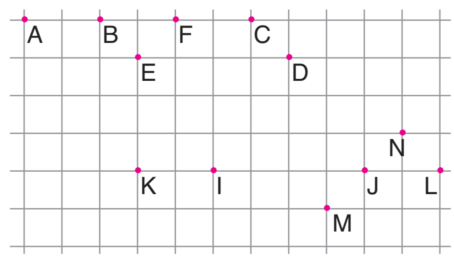
On écrit alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Les bipoints (A, A), (B, B) représentent un même vecteur appelé le vecteur nul et noté $\overrightarrow{0}$.

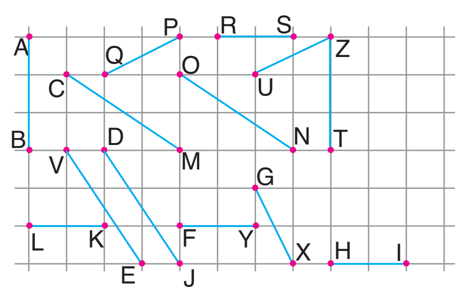
Activité 2 Observer le quadrillage ci-dessous.

1- Nommer des vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.

2- Nommer des vecteurs égaux à $\overrightarrow{CD}$.



Activité 3 Regrouper les familles de bipoints qui représentent le même vecteur.

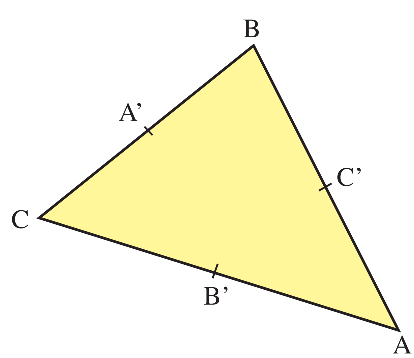


Egalité vectorielle

Activité 4 Observer la figure ci-contre où A', B' et C' sont les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].

1- Nommer tous les vecteurs de la figure qui sont égaux au vecteur $\overrightarrow{B'A'}$. Justifier.

2- Nommer tous les vecteurs de la figure qui sont égaux au vecteur $\overrightarrow{BA'}$. Justifier.



Activité 5 A, B, C et D sont quatre points distincts du plan.

1- Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

2- Montrer que si les points A, B et C sont non alignés on a

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à ABDC est un parallélogramme.

3- Montrer que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors AB = CD et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Activité 6 A, B , C et D sont quatre points distincts du plan tels que les points A, B et C sont alignés.

Montrer que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors AB = CD et les points A, B, C et D sont alignés.

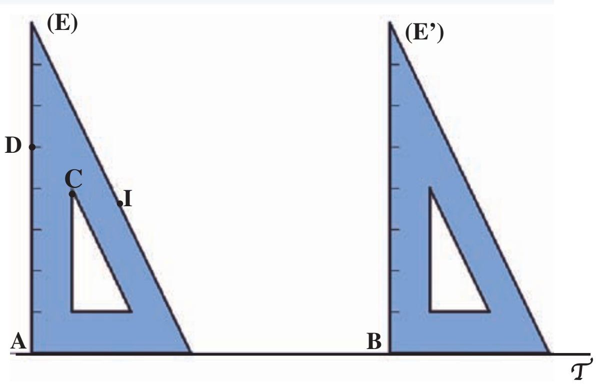
Activité 7 A et B sont deux points distincts.

1- Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$ équivaut à M = B.

2- Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB'}$ équivaut à B est le milieu du segment [AB'].

Image d'un point par une translation

Activité 8 1- Reproduire la figure ci-contre.
2- On a fait glisser l'équerre, le long de la droite $\mathcal{T}$, de la position (E) jusqu'à l'amener à la position(E').
Par ce glissement, B correspond à A, C' à C, D' à D et I' à I.
Marquer les points C', D' et I'.



3- Nommer des vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$?
4- Que peut-on dire des distances CD et C'D' ; DI et D'I' ; CI et C'I' ?
5- a) Marquer un point M sur (E) et placer sur (E') le point M' qui lui correspond par ce glissement.
b) Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{MM'}$?

Activité 9

Reproduire la figure ci-contre

1- a) Montrer qu'il existe un unique point M' du plan tel que

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

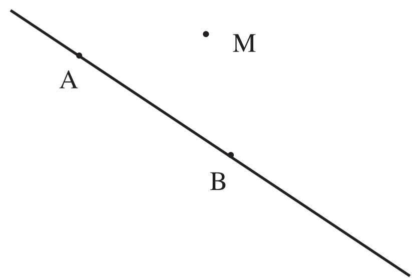
b) Reproduire la figure et construire le point M' au compas.

2- Soit N un point de la droite (AB).

a) Montrer qu'il existe un unique point N' du plan tel que

$\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{AB}$.

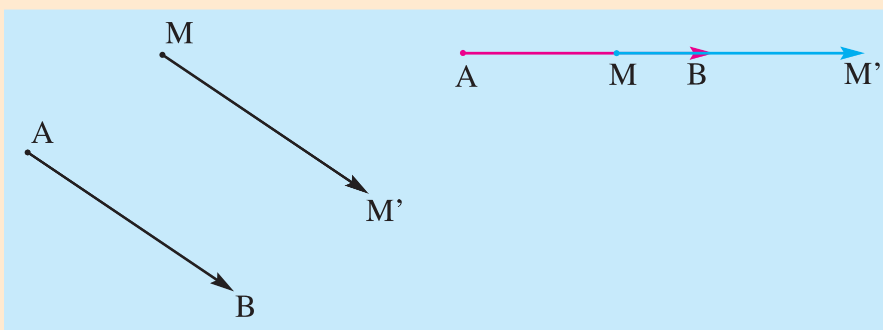
b) Reproduire la figure et construire le point N' au compas.



Définition

Soient A et B deux points distincts et M un point du plan.
On dit que le point M' est l'image du point M par la translation

de vecteur $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.



Activité 10

Conservation des distances

Soient A et B deux points distincts.
Soient M et N deux points distincts et M', N' leurs images respectives par

la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

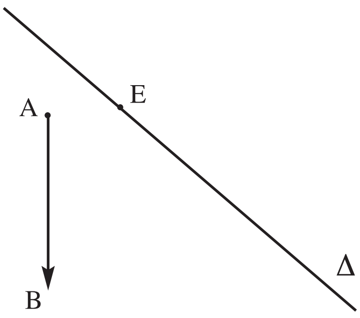
1- Expliquer pourquoi $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$.

2- Que peut-on dire des distances MN et M'N' ?

3- Conclure.

Image d'une droite par une translation

Activité 11 Reproduire la figure ci-contre où
A et B sont deux points distincts et
Δ est une droite passant par E.
1- Construire le point E' image de E par
la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



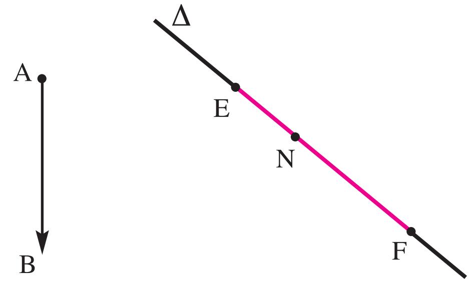
2- Choisir quelques points de Δ et construire leurs images par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Quelle conjecture peut-on faire ?
3- On désigne par Δ' la droite passant par E'et parallèle à Δ.
Soit un point M de Δ distinct de E et M' son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Montrer que M' appartient à Δ'.
4 - a) Soit un point N' de Δ' distinct de E'. Construire le point N tel que $\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{AB}$.

b) Montrer que NEE'N' est un parallélogramme.
c) Que peut-on dire de l'image de la droite Δ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$?

Image d'un segment par une translation

Activité 12 Reproduire la figure ci-contre où
A et B sont deux points distincts et
Δ est une droite passant par E.
1- Soit F un point de Δ distinct de E
soit N un point du segment [EF].
On désigne par E', F' et N' les images
respectives de E, F et N par

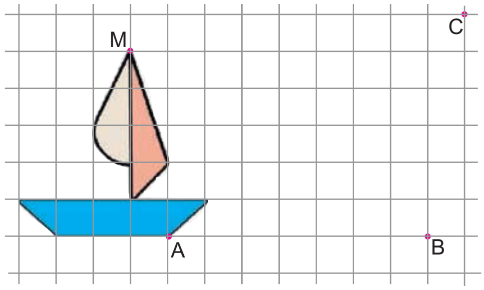


la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Montrer que E'N' + N'F' = E'F'.
Conclure.

2- Soit M'un point du segment [E'F'] et M le point tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.
Montrer que EM + MF = EF.
3- Que peut-on dire de l'image du segment [EF] par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$?

Figures superposables

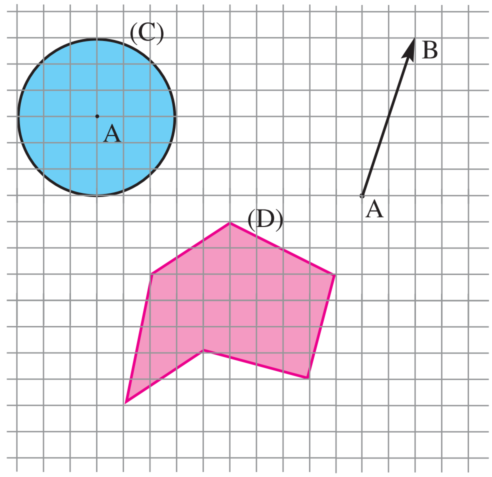
Activité 13 1- Reproduire la figure ci-contre qui représente un voilier (V).
2- L'unité d'aire étant celle d'un petit carré.
Calculer la longueur de la coque de (V) et l'aire de ses voiles .
3- a) Tracer (V') l'image du voilier (V) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
b) Vérifier à l'aide du papier calque que (V) et (V') sont superposables.
4- On note (V'') l'image de (V) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Que vaut la longueur de la coque et l'aire des voiles de (V'') ?



Activité 14 Reproduire la figure ci-contre.
1- Tracer l'image (C') du cercle (C) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2- Vérifier à l'aide du papier calque que (C) et (C') sont superposables.
Que peut-on dire des aires respectives des disques délimités par (C) et (C') ?
3- Tracer l'image (D') du polygone (D) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

4- Vérifier à l'aide du papier calque que (D) et (D') sont superposables.
Que peut-on dire de leurs angles homologues ?

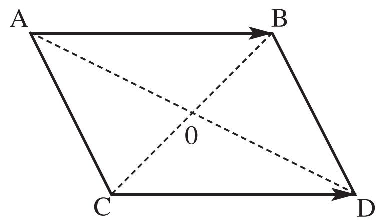


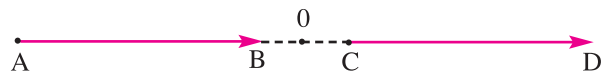
Retenir

Vecteur

◊ Soit A, B, C et D quatre points.
On dit que les bipoints (A, B) et (C, D) représentent le même vecteur si les segments [AD] et [BC] ont le même milieu.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à [AD] et [BC] ont le même milieu.



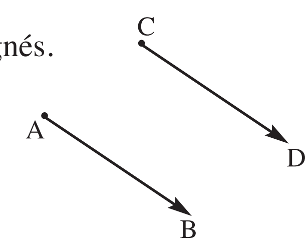


Egalité vectorielle

◊ Soient quatre points A, B, C et D.

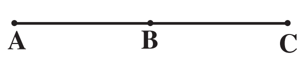
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

◊ Soient quatre points A,B,C et D tels que A, B et C sont non alignés.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à ABDC est un parallélogramme.



◊ Soient quatre points A, B, C et D tels que A, B et C sont alignés.
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors AB = CD et les points A, B, C et D sont alignés.

◊ Soient trois points distincts A , B et C.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ équivaut à B est le milieu du segment [AC].



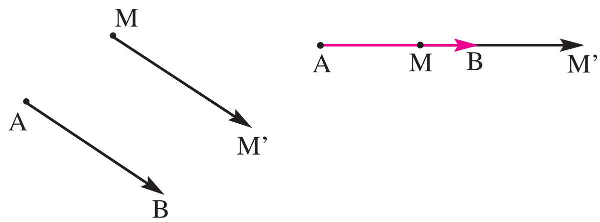
◊ Soient A et B deux points.
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$ équivaut à M = B.

Retenir

Image d'un point par une translation

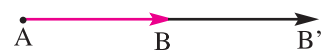
◊ Soit A et B deux points distincts et M un point du plan.

L'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.



◊ L'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point B.

◊ L'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point B' symétrique de A par rapport à B.



◊ La translation conserve les distances.

Image d'une droite

◊ L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle.

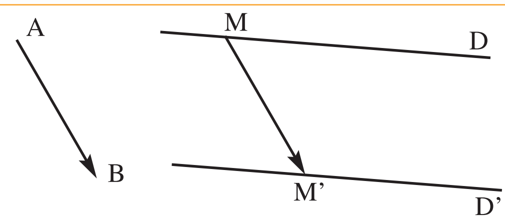
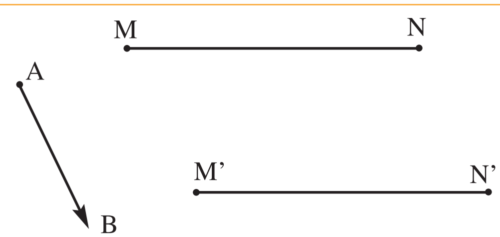


Image d'un segment

◊ L'image d'un segment par une translation est un segment qui lui est isométrique.



Retenir

Image d'un cercle

On admet que
◊ L'image d'un cercle par une translation est un cercle de même rayon et dont le centre est l'image du centre.

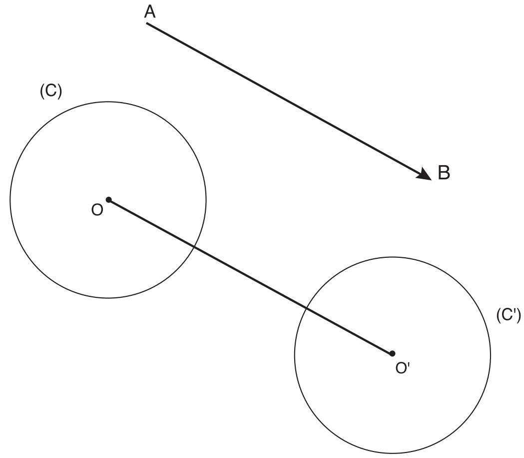
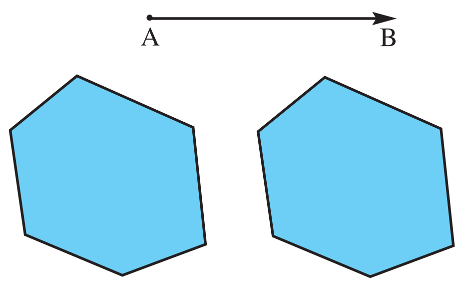


Image d'un polygone

◊ Un polygone et son image par une translation sont superposables.
En particulier ils ont la même aire, le même périmètre et leurs angles homologues sont égaux.



Mobiliser ses compétences

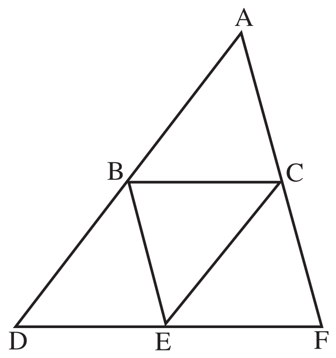
Situation 1

Tracer un triangle ABC.
1- Construire le point D symétrique de A par rapport à B.
2- Construire le point E symétrique de C par rapport à B.
3- Montrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{ED}$.

Stratégie de résolution
1- Il suffit de trouver la nature du quadrilatère ACDE.
En déduire l'égalité vectorielle qui convient.

Situation 2

Dans la figure ci-contre, B est le milieu de [AD],
BCFE est un parallélogramme.



1- Quelle est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$?

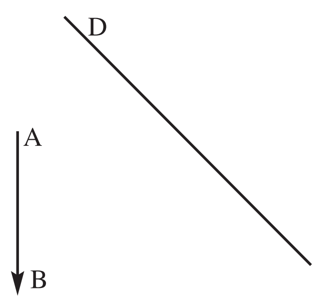
2- Quelle est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$?

3- Quelle est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$?

Stratégie de résolution
2- Il suffit de déterminer la nature du quadrilatère ABEC puis conclure.

Situation 3

Dans la figure ci-contre A et B sont deux points distincts et D est une droite.



1- Construire l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2- Construire l'image de (AB) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3- Construire l'image du cercle C de diamètre [AB] par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Stratégie de résolution
1- On sait que l'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle.

Choisir un point de D. Construire son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Conclure.

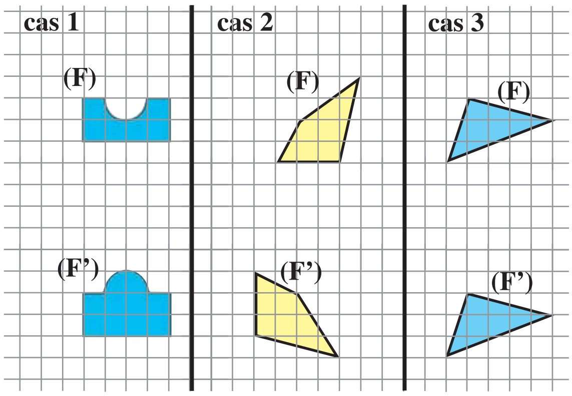
2- Choisir un point de (AB). Construire son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Conclure.
3- On sait que l'image d'un cercle par une translation est un cercle de même rayon et dont le centre est l'image du centre.

Construire l'image du centre du cercle C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Conclure.

Reconnaître l'image d'une figure par une translation

Situation

En utilisant le quadrillage, dire pour chacun des trois cas suivants, si F'est l'image de F par une translation.



Stratégie de résolution

Dans le premier cas, F et F' ne sont pas superposables. Conclure.
Dans le deuxième cas, F et F' sont superposables.
Penser aux propriétés d'une translation.
Dans le troisième cas, F'est l'image de F par une translation. Justifier.

Problèmes de construction

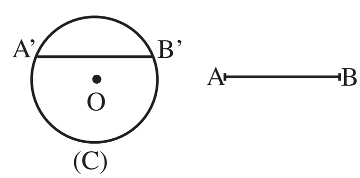
Situation 1

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon r. Soient A et B deux points distincts n'appartenant pas à (C) et tels que AB < 2r.

Construire une corde [A'B'] telle que AB = A'B' et les droites (A'B') et (AB) soient parallèles.

Stratégie de résolution

1ère étape
On trace une figure d'étude.



2ème étape
On analyse la figure.
- B' est l'image de A' par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Justifier.
- B' appartient au cercle (C') image de (C) par cette même translation. Justifer.
- A' est l'antécédent de B' par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Justifier.

3ème étape
Réaliser la construction de la corde [A'B'] en donnant les différentes étapes.

Situation 2

On ce propose de donner un procédé de construction d'un triangle ABC connaissant ses médianes.

Stratégie de résolution

1- Tracer trois droites D_1, D_2 et D_3 sécantes en un point G.

2- Fixer un point A' sur D_1 distinct de G.

En déduire l'un des sommets du triangle ABC que l'on notera A.

4- Construire D' l'image de la droite D_2 par la translation de vecteur $\overrightarrow{AG}$.

Expliquer pourquoi la droite D' coupe D_3 en un point C.

5- La droite (AC) coupe la droite D_2 en B'. Que représente B' pour le segment [AC] ?

6- Finir la construction du triangle ABC.

Coordonnées et translation

Situation

On considère un repère (O , I , J).

1- Placer les points A (2 , 1) ; B(-1 , 2) ; C (0, -4) et A' (5, 3)

2- Placer les points B' , C' et A'' les images respectives de B , C et A' par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

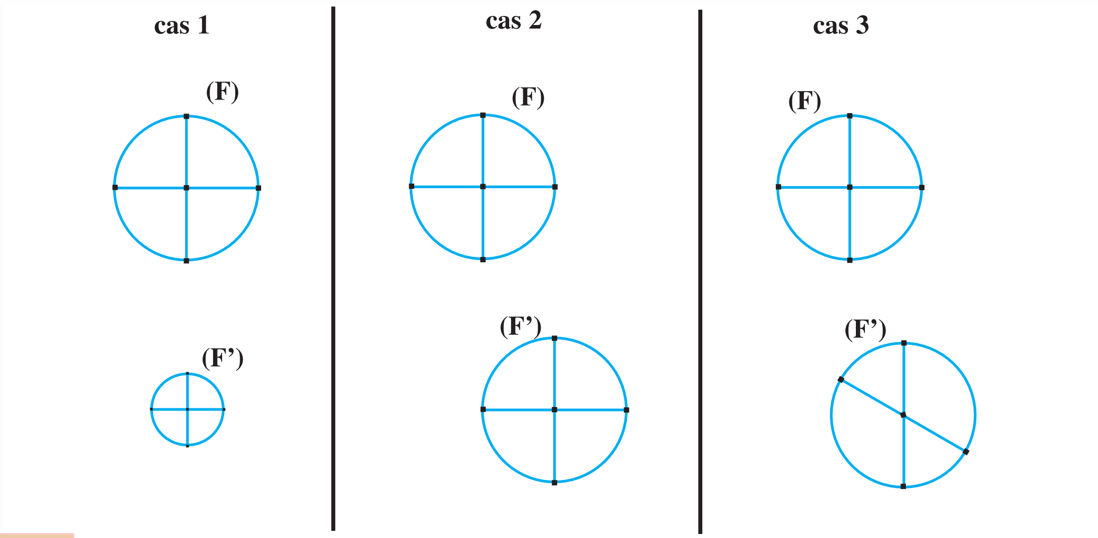
3- Lire graphiquement les coordonnées des points B', C' et A''.

Stratégie de résolution

2- Penser à la définition de l'image d'un point par une translation.

Observer

Dire pour chaque cas si la figure (F') est l'image de la figure (F) par une translation



Vrai ou Faux

Répondre par vrai ou faux à chacune des questions suivantes.

1- A est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

2- Si C est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors B est le milieu de [AC].

3- Si ABCD est un losange de centre O alors son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ est un losange de centre C.

4- Si ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD] alors l'image de la droite (AB) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la droite (CD).

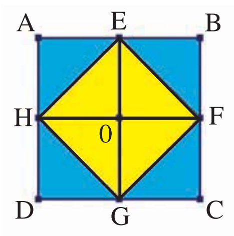
Recopier et compléter

A et B sont deux points distincts. Recopier et compléter.

Si les points M et M' sont tels que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ alors M' est l'image de M par…
Si les points M et M' sont tels que ABMM' est un parallélogramme alors M est l'image de B par…
Si les points M et M' sont tels que ABM'M est un losange alors M' est l'image de A. par…
Si les points M et M' sont tels que AMBM' est un carré alors M' est l'image de M par…

Appliquer

1 Dans la figure ci-contre ABCD est un carré de centre O. E, F, G et H désignent les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [AD].

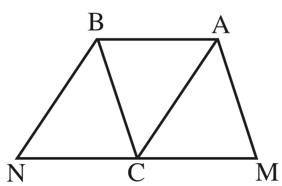


1- Nommer des vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{DH}$.

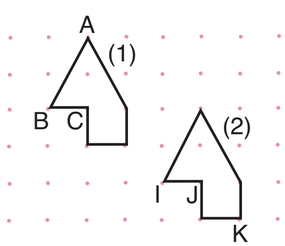
2- Nommer des vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{HE}$.

3- Nommer des vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{OF}$.

2 Dans la figure ci-contre ABCM et BACN sont des parallélogrammes. Que représente C pour le segment [NM]?

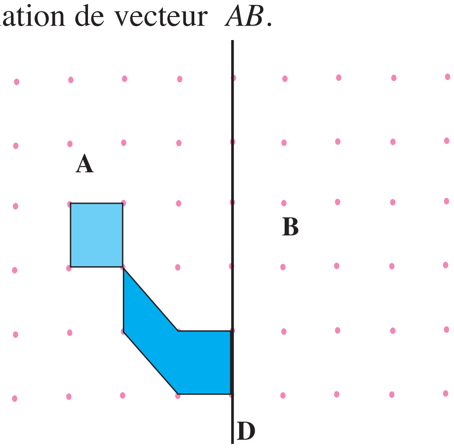


3 La figure (2) est l'image de la figure (1) par une translation. Déterminer le vecteur de cette translation.

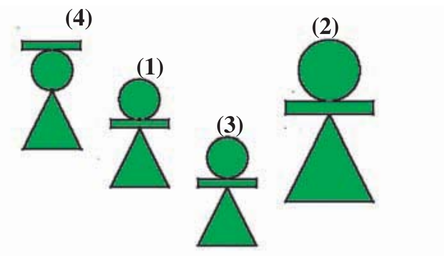


4 1-Tracer le symétrique du motif coloré par rapport à la droite D.

2- Tracer l'image de la figure obtenue par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



5 L'une des figures (2), (3) ou (4) est l'image de la figure (1) par une translation. Indiquer laquelle?



6 ABCD est un parallélogramme Quelle est l'image de la droite (AB)

a) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$?

b) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$?

c) par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$?

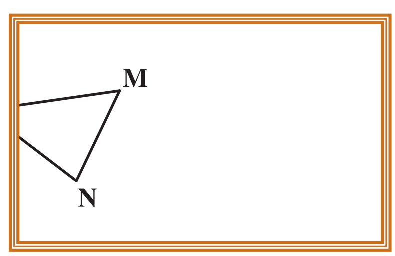
d) par la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$?

7 A, B, C , D, E et F sont six points tels que

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DA}$ *et* $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{FD}$.

Montrer que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FA}$.

8



Le sommet P du triangle MNP n'est pas représenté. Sans sortir du cadre construire un triangle de même périmètre que MNP.
(Penser à construire l'image du triangle MNP par une translation convenable).

Maîtriser

9 A et B sont deux points distincts. Déterminer dans chaque cas l'ensemble des points M et le construire.

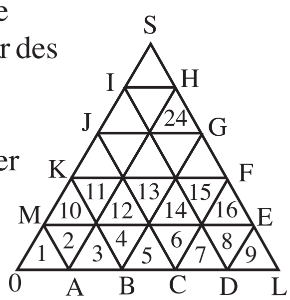
1- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$
2- $AM = AB$
3- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$
4- $AM = BM$
5- (AM) ⊥ (AB)
6- (AM) ⊥ (MB)

10 ABC est un triangle.
1- Construire le point I image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

2- Construire le point J image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$.

3- Montrer que A est le milieu du segment [I J].

11 SOL est un triangle équilatéral pavé par des triangles équilatéraux et isométriques.



1- Recopier et compléter
a) L'image du triangle (12) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ est ….
b) Le triangle (6) est l'image du triangle (18) par la translation de vecteur ….
c) L'image du triangle … par la translation de vecteur $\overrightarrow{LF}$ est le triangle (21).
d) Le triangle (4) est l'image du triangle (14) par…
2- Proposer d'autres phrases à compléter en changeant les numéros des triangles.

12 ABC est un triangle.
Montrer que les images des points A, B et C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ se trouvent sur un cercle dont le rayon est égal au rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

13 Tracer un triangle EFG isocèle en E tel que FG = 8 cm et $\widehat{FEG} = 50°$.
1- Placer K l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{EG}$.

2- Quelle est la nature de EGKF ? Calculer une valeur approchée de son aire.

14 Soient quatre points distincts A, B, C et D.
1- Placer I et J les symétriques respectifs de A et B par rapport à C. Placer K et L les symétriques respectifs de A et B par rapport à D.
2- Quelles sont les images de L et J par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$?

3- En déduire la nature de IJLK.

15 Tracer un triangle ABC. On note H le pied de la hauteur issue de A.
1- Construire le triangle CB'C' image de ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

2- Soit H' le pied de la hauteur de CC'B' issue de C. Démontrer que H' est l'image de H par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

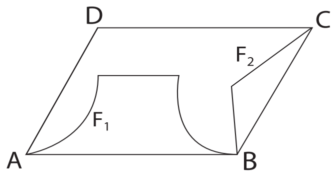
16 1- Tracer un triangle BUS rectangle en B tel que BU = 2cm et BS = 3cm.
2- Tracer UU'S' l'image de BUS par la translation de vecteur $\overrightarrow{BU}$ puis tracer U'U''S'' l'image de UU'S' par la même translation.

3- La droite (BS'') coupe la droite (US) en M. Calculer BM et UM.

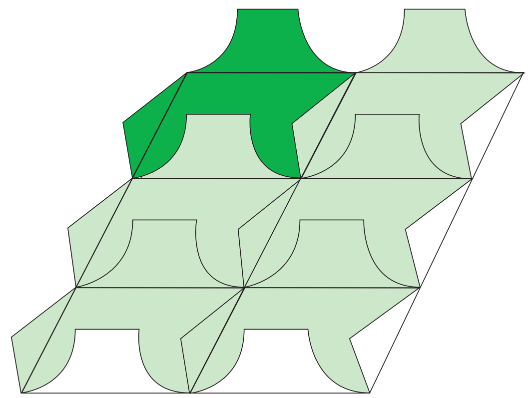
17 Tracer un cercle C de centre O et de rayon 3cm et placer un point O' tel que OO' = 5cm.
1- Tracer C' l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.
2- Les cercles C et C'se coupent en I et J. Construire le point I' image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.
3- Montrer que les droites (IJ) et (I I') sont perpendiculaires.
4- Montrer que O', J et I' sont alignés.
5- Placer un point M sur C et construire M' son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.
6- Quelle est la nature du triangle JI'M' ?
7- Montrer que lorsque M varie sur le cercle C, l'orthocentre du triangle JMM' reste fixe.

18 On considère un triangle ABC et un rectangle EBCD. La perpendiculaire à (AC) passant par E coupe la perpendiculaire à (AB) passant par D en un point K.
1- Faire une figure.
2- Construire le point H image du point K par la translation de vecteur $\overrightarrow{EB}$.
Que représente le point H pour le triangle ABC ?

19 ABCD est un parallélogramme.
Sur chacun de ses côtés [AB] et [BC], sont tracés deux lignes (F_1) et (F_2).
1- a) Reproduire la figure ci -dessous et tracer (F'_1) l'image de (F_1) par la translation



de vecteur $\overrightarrow{AD}$ puis (F'_2) l'image de (F_2) par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.
b) Hachurer le motif (F) limité par (F_1), (F_2), (F'_1) et (F'_2).
c) Montrer que l'aire du motif (F) obtenu est égale à l'aire du parallélogramme ABCD.
2- a) Observer le dessin ci-dessous et expliquer comment peut – on le réaliser à partir des images du motif (F) par des translations.
b) Calculer l'aire de la partie colorée en prenant l'aire du parallélogramme ABCD comme unité d'aire.



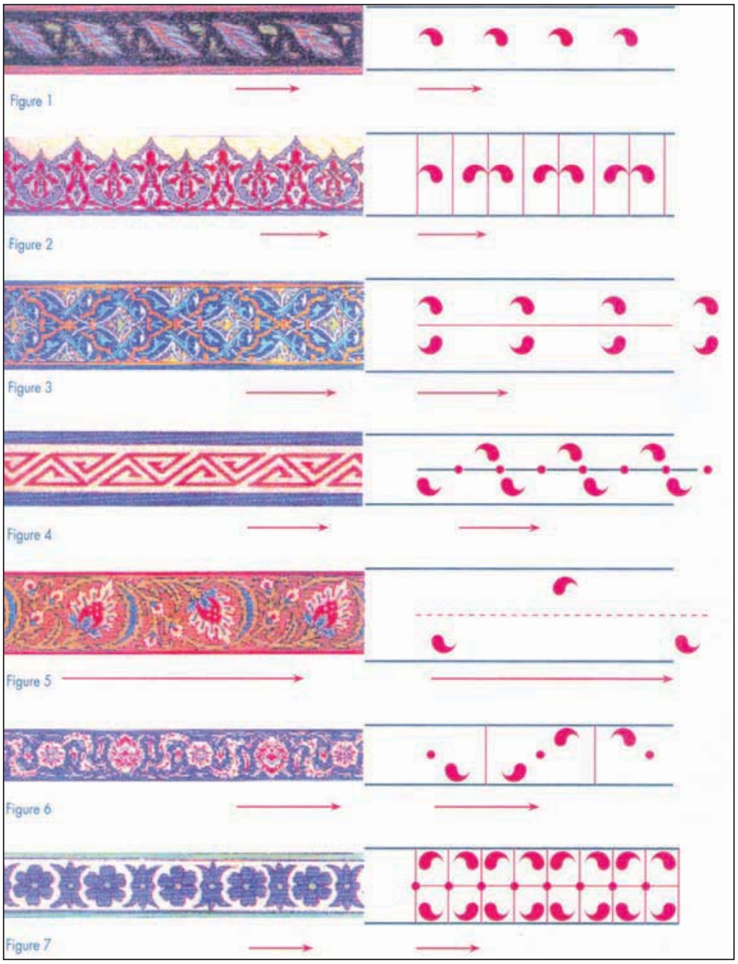
Avec l'ordinateur

A l'aide d'un logiciel :
- Tracer un cercle (C) et un vecteur $\overrightarrow{AB}$ non nul.
- Construire (C') l'image de (C) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Placer un point M sur (C) et construire son image M' par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Déplacer M sur (C). Que se passe-t-il pour M'? Justifier.
- Placer un point N à l'intérieur de (C) et construire son image N' par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Déplacer N à l'intérieur de (C). Que se passe-t-il pour N'? Justifier.

Math - Culture

Les sept groupes de frise

Une frise est une partie du plan invariante par translation. Le motif de base peut se répéter indéfiniment. On démontre qu'il ya exactement 7 groupes de frises illustrées par les figures ci-contre.



(D'après Autodidactique Quillet)

Vecteur

Le mot vecteur vient du mot latin vehere qui signifie transporter.

Dessin d'Escher

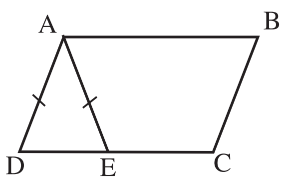
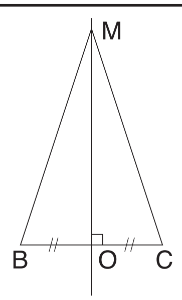
Le motif de base de ce dessin est un oiseau.

Chapitre 5

Somme de deux vecteurs- Vecteurs colinéaires

Reprendre

Pour chaque énoncé, on propose trois réponses A, B et C. Une ou plusieurs sont correctes. Lesquelles ?

Réponses / **Enoncés**	**A**	**B**	**C**
ABCD est un parallélogramme. 	$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE}$.	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.	Le point A est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.	Le point C est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.	Le point B est le milieu de [AC].
A, B et I sont trois points distincts. Si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ alors	AI = IB.	I est le milieu de [AB].	$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.
A, B et S sont trois points tels que A et B sont distincts. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AS}$ alors	le point A est le milieu de [BS].	S = B	S est un point du cercle de centre A et de rayon AB.
	MB = MC.	$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$	Le triangle OMC est l'image du triangle BOM par la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$.

Somme de deux vecteurs

Activité 1

Reproduire la figure ci-contre.

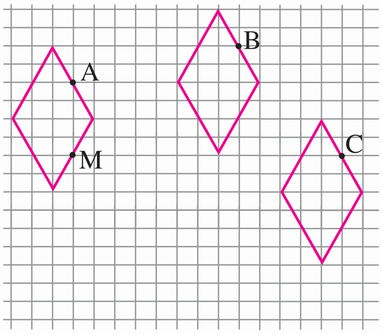
1- Placer le point M' image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2- Placer le point M'' image de M' par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

3- M'' est l'image de M par une translation. Quelle conjecture peut-on faire concernant cette translation?

4- Montrer que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{CM''}$.

5- Comparer les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MM''}$.



On dit que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
On écrit $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Cette relation est appelée la relation de Chasles des vecteurs.

Activité 2

Soit A un point du plan.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

On désigne par B et D les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

1- Construire le point C tel que les segments [AC] et [BD] aient le même milieu.

2- Justifier l'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Définition

Soit A un point du plan. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Soient B et D les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

On appelle vecteur somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ où C est le point tel que les segments [AC] et [BD] aient le même milieu.

On note $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

Vecteurs opposés

Activité 3

Soient A et B deux points distincts.

1- Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$.

2- Montrer que

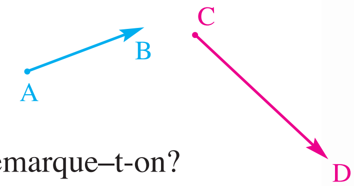
I est le milieu de [AB] équivaut à $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.

> On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés.

Représentation de la somme de deux vecteurs

Activité 4

1- Dans la figure suivante $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs. On se propose de construire un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

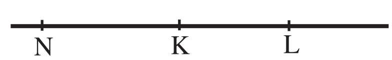


a) Construire le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CD}$.
Conclure.

b) Construire un vecteur égal à $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$. Que remarque–t-on?

2- Dans la figure ci-dessous les points K , L et N sont alignés.

Construire dans chacun des cas suivants le point P tel que $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{KP}$.

1er cas	2ème cas
	

Activité 5

On considère les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$.

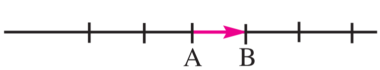
1- Montrer que $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

2- Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$?

Produit d'un vecteur par un réel

Activité 6

Soient A et B deux points distincts. On munit la droite (AB) du repère (A, B).



1- Quelles sont les abscisses respectives des points A et B ?

2- Placer le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$. Quelle est l'abscisse de C ?

3- Placer le point D d'abscisse 3. Ecrire $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

Définition

Soit A un point du plan.

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et B le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

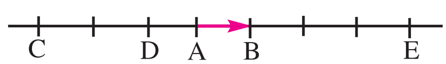
Soit α un réel et M le point d'abscisse α dans le repère (A, B).

On appelle vecteur produit de $\vec{u}$ par α et on note $\alpha\vec{u}$, le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \overrightarrow{AM}$,

on a alors

($\overrightarrow{AM} = \alpha\ \overrightarrow{AB}$) équivaut à (les points A, B et M sont alignés et le point M est d'abscisse α dans le repère (A, B)).

Activité 7 Soient A et B deux points distincts. On munit la droite (AB) du repère (A,B).



$\overrightarrow{AA} = 0\ \overrightarrow{AB}$.

1- Donner les abscisses des points A, C, E et D dans le repère (A, B).

2- a) Ecrire les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

b) Comparer AC et AB, AE et AB, AD et AB.

Le vecteur (-1) $\overrightarrow{AB}$ est noté - $\overrightarrow{AB}$.

3- Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont opposés.

4- Placer le point P tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ puis comparer AP et AB.

5- Placer le point Q tel que $\overrightarrow{BQ} = -2\ \overrightarrow{BE}$ puis comparer BQ et BE.

Lorsque $\overrightarrow{AM} = \alpha\ \overrightarrow{AB}$ et $\alpha > 0$, on dit que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens.

Lorsque $\overrightarrow{AM} = \alpha\ \overrightarrow{AB}$ et $\alpha < 0$, on dit que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraires.

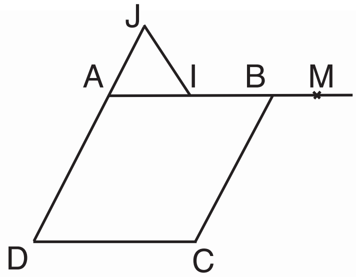
Activité 8 Soit A, B et F trois points non alignés.

1- Placer le point C tel que $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AB}$.

2- a) Placer le point G tel que $\overrightarrow{FG} = 2\,\overrightarrow{AB}$.
b) Quelle est la position relative des droites (FG) et (AB) ?
c) Comparer FG et AC. Comparer alors FG et AB.

3- On considère le point E tel que $\overrightarrow{FB} = \frac{-1}{3}\,\overrightarrow{CE}$. Quelle est la position relative des droites (FB) et (CE) ? Comparer FB et CE.

Activité 9 Dans la figure ci-dessous ABCD est un losange, I est le milieu de [AB], le triangle AIJ est isocèle de sommet principal A et M est un point de la droite (AB).



1- Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires et de même sens.

2- Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

3- a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires et de sens contraires.

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{MA}$ sont colinéaires et de sens contraires.

4- Les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DJ}$ sont-ils colinéaires ?

> Deux vecteurs sont dits colinéaires si l'un est le produit de l'autre par un réel.
> Si ce réel est strictement positif, on dit que ces vecteurs sont de même sens.
> Si ce réel est strictement négatif, on dit que ces vecteurs sont de sens contraires.

Milieu d'un segment

Activité 10 A, B et I sont trois points alignés et deux à deux distincts. Soit (A,I) un repère de la droite (AB).

Montrer que I est le milieu de [AB] équivaut à $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.

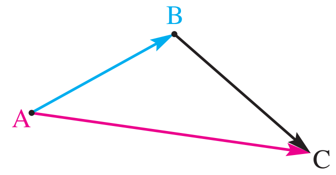
Somme de deux vecteurs

◊ Soient A, B et C trois points.

On dit que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

On écrit $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

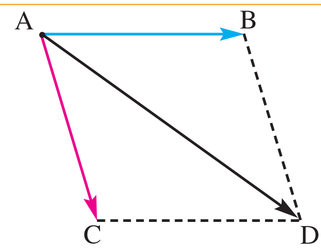
Cette relation est appelée la relation de Chasles des vecteurs.



La règle du parallélogramme

◊ Soient A, B,C et D quatre points non alignés. On a

ABDC est un parallélogramme équivaut à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.



Vecteurs colinéaires

◊ Soient A et B deux points distincts du plan.

Soient α un réel et M le point d'abscisse α dans le repère (A,B). On a

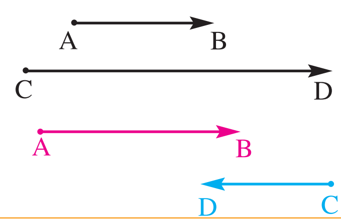
($\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$) équivaut à (les points A, B et M sont alignés et le point M est d'abscisse α dans le repère (A, B)).

◊ Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan et α un réel non nul.

Si $\overrightarrow{CD} = \alpha\ \overrightarrow{AB}$ alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles et $CD = |\alpha|\,AB$.

Si $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{AB}$ et $\alpha > 0$ on dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens

Si $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{AB}$ et $\alpha < 0$ on dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de sens contraires.



◊ Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan.

Si les droites (AB) et (CD) sont parallèles alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Milieu d' un segment

A, B et I sont trois points distincts. On a

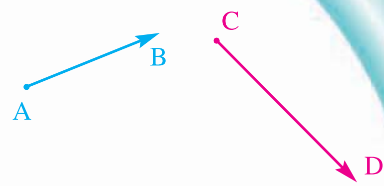
I est le milieu de [AB] équivaut à $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.

I est le milieu de [AB] équivaut à $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.

Mobiliser ses compétences

Vecteurs et parallélogrammes

Situation 1



On donne les points A, B, C et D.
1- Construire au compas seulement le quatrième sommet E du parallélogramme ACDE.
2- Construire au compas seulement le quatrième sommet F du parallélogramme AEFB.

3- A-t-on $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$?

Stratégie de résolution
1- Penser à la règle du parallélogramme.
3- Evident.

Situation 2

On considère A, B et M trois points non alignés.
1- Montrer que

Si I est le milieu du segment [AB] alors $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
2- Etudier la réciproque et conclure.

Stratégie de résolution
Faire une figure et utiliser la règle du parallélogramme.

Vecteurs et triangles

Situation 1

Tracer un triangle ABC puis construire A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].

Soit G le centre de gravité de ABC. On se propose de montrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
1- Construire G' le symétrique de G par rapport à C'.

2- Montrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GG'}$
3- Conclure.

Stratégie de résolution
2- Penser à utiliser le résultat de la situation précédente.

Situation 2

Soient ABC un triangle et O, T et K les milieux respectifs des côtés [AB], [AC] et [BC].

Soient I et J les points tels que $\overrightarrow{OT} = 2\,\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

La droite (OT) coupe la droite (BJ) en L.
1- Faire une figure.

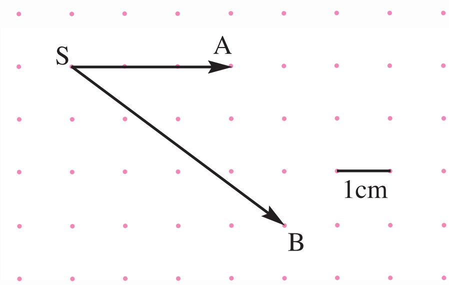
2- Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires.
3- Montrer que les points I, A et J sont alignés.
4- Evaluer les rapports $\frac{TL}{BC}$, $\frac{AJ}{BC}$ et $\frac{TL}{AJ}$.

Stratégie de résolution
2- Il suffit de montrer que les droites (AI) et (BC) sont parallèles.
3- Penser à la position relative des droites (BC) et (AJ).
4- Penser au théorème de Thalès.

Vecteurs et forces

Situation 1

Un solide S est soumis à deux forces **F** et **F’**.
La figure ci-contre modélise la situation.
Les forces **F** et **F’** sont représentées par les vecteurs $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SB}$ et les intensités de **F** et **F’** (exprimées en Newton) sont représentées par les distances SA et SB.



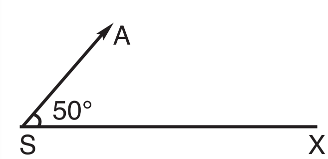
1cm représente 1N

1- a) Reproduire la figure et représenter la résultante **R** des deux forces **F** et **F’**.
b) Calculer les intensités des forces **F**, **F’** et **R**.
2- Quelle force doit-on exercer sur ce solide pour qu’il reste immobile ?

Stratégie de résolution
1- a) On rappelle que la résultante **R** est la somme des forces **F** et **F’**.
b) Utiliser le théorème de Pythagore pour calculer les distances SA, SB et SC.
2- Un solide reste immobile lorsque la somme des forces auxquelles il est soumis est nulle. Conclure.

Situation 2

Un solide S est soumis à une force **F** d’intensité 10 N.
La figure ci-contre modélise la situation.
La force **F** est représentée par le vecteur $\overrightarrow{SA}$ et la distance SA représente l’intensité de **F**.
On exerce sur S une deuxième force **F’** de même intensité que **F** de sorte que le solide se déplace sur la demi-droite [Sx)



Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de l’intensité de la résultante des forces **F** et **F’**.

Vrai ou Faux

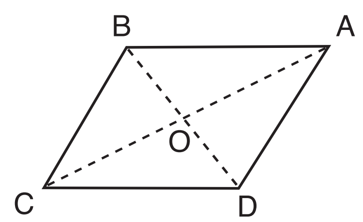
ABCD est un parallélogramme. Repondre par vrai ou faux.

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC}$.

b) $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AC}$.

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{0}$.

d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$.



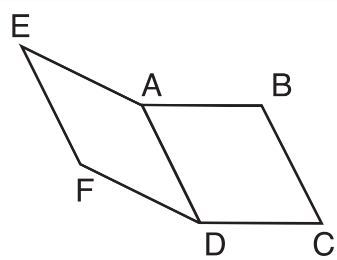
Recopier et compléter

1- Dans la figure ci-dessous ABCD et AEFD sont deux parallélogrammes.

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = ...$

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} = ...$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} = ...$



2- Dans la figure ci-contre

$\overrightarrow{OA} = ... \overrightarrow{OC}$.

3- Si EF et GH sont deux vecteurs colinéaires et de même sens et GH = $\frac{1}{2}$ EF alors

$\overrightarrow{EF} = ... \overrightarrow{GH}$.

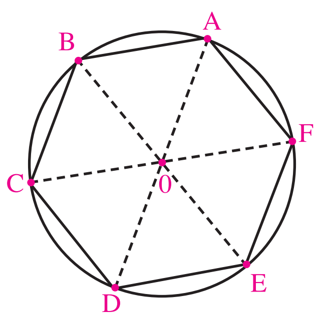
4- Si $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont deux vecteurs colinéaires et de sens contraires et AI = 3 ST alors

$\overrightarrow{AI} = ... \overrightarrow{ST}$.

5- Si (AB) et (CD) sont deux droites parallèles et M est un point de la droite (AB) alors les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont …

Appliquer

1 ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre O.



Recopier et compléter :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} = \ldots$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} = \ldots$

$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} = \ldots$; $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OA} = \ldots$

2 Tracer un parallélogramme ABCD.

1- Parmi les points de la figure reconnaître les points P et Q définis par

$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}$.

2- Placer E le symétrique de B par rapport à C puis comparer $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$.

3 Tracer un triangle ABC.

1- Placer le point E tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$.

2- a) Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{FC}$.
b) Montrer que F est le milieu de [AE].

4 TUC est un triangle.

1- Construire les points A et E tels que

$\overrightarrow{UA} = \overrightarrow{CT}$ et $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{TU}$.

2- Montrer que U est le milieu de [AE].

5 PIC est un triangle.

Soit N le milieu de [PI] et O un point de la droite (CN).

1- Construire les points R et S tels que

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PO}$.

2- Montrer que $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{CO}$. En déduire que les droite (SI) et (CN) sont parallèles.

6 Tracer un parallélogramme ABCD de centre O.

1- Construire le point I défini par $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}$

2- La droite (OI) coupe le segment [AD] en K. Montrer que K est le milieu de [AD].

7 A, B et C sont trois points non alignés.

1- Construire le point D image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

2- Construire le point E tel que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$

3- Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}$.

4- Montrer que C est le milieu de [BE].

Maîtriser

8 Soit ABCD un parallélogramme et I le milieu de [BC]. Soit E le symétrique de A par rapport à I.

Déterminer le réel k vérifiant $\overrightarrow{DE} = k\overrightarrow{BA}$.

9 Tracer un triangle ABC.

1- Construire les points I, E et F tels que

- I est le milieu de [BC],
- $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.
- $\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB}$.

2- Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont-ils colinéaires ?

10 Soit un parallélogramme NUIT de centre O. On désigne par K le milieu de [UI] et par J le milieu de [TI]. Soit M le point défini par $\overrightarrow{OM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OK}$. La parallèle à la droite (KJ) passant par M coupe (OJ) en H.

1- Faire une figure.

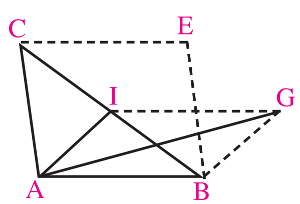
2- a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{TU}$ sont colinéaires.

b) Déterminer le réel k vérifiant $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{TU}$.

11 A et B sont deux points distincts. Dans chacun des cas suivants, déterminer et construire l'ensemble des points M.

a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$. b) AM = AB.
c) AM = BM. d) (AM) ⊥ (MB).
e) (AM) // (AB). f) AM + MB = AB.
g) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ h) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

12 Dans la figure qui suit, I est le milieu de [BC], $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI}$.



1- Montrer que $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{IE}$.

2- Simplifier la somme $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{CE}$.

3- Déterminer le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{GM}$.

13 Soit un triangle ABC et I le milieu du segment [BC].

1- Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

2- Construire le point F tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI}$.

3- Construire le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AI}$.

4- Que peut-on conjecturer concernant les points F, E et G ? Justifier.

14 Soit ABC un triangle et I le milieu de [BC].

1- Construire les points D et E tels que BIAD et IACE soient des parallélogrammes.

2- Quels sont tous les vecteurs de la figure égaux à $\overrightarrow{BI}$? à $\overrightarrow{BD}$? à $\overrightarrow{DI}$?
En déduire que I est le milieu de [DE].

3- En n'utilisant que les points de la figure, donner un vecteur égal à chacun des vecteurs suivants : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{IE}$, $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{EC}$.

4- On pose $\vec{u} = \overrightarrow{BI}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BD}$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BA}$ à l'aide de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Avec l'ordinateur

A l'aide d'un logiciel :

Exercice 1

1-Placer quatre points A, B, C et D.

2- Représenter $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CB}$.

3- Placer un point M quelconque

a) Construire M' image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis construire M"'image de M' par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

c) Construire N' l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ puis construire l'image de N'par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.

d) Que peut-on conjecturer pour $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$?

Exercice 2

1-Placer quatre points distincts A, B, C et D et représenter $\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{AB}$.

2- Représenter le point E tel que $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB}$. Expliquer.

3- Représenter le point F tel que $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Quelle est la position relative des droites (CE) et (DF) ? Expliquer.

Math - Culture

Note historique

Michel Chasles est un Mathématicien français. Ses travaux de géométrie marquent un pas décisif vers l'élaboration du calcul vectoriel. C'est pour lui rendre hommage pour

Michel Chasles (1793-1880

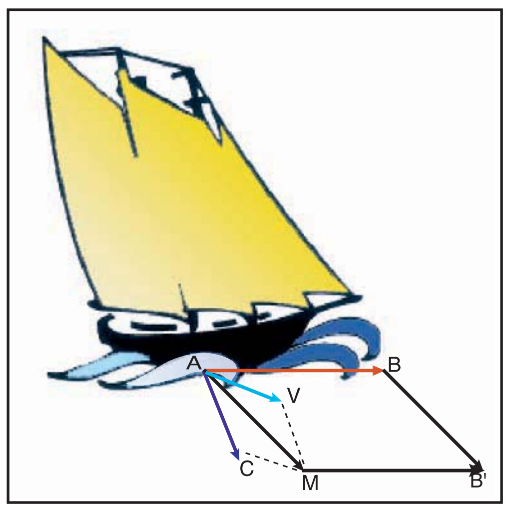
la qualité de ses travaux qu'on a donné son nom à la relation

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ et à toute relation du même type telle que

$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ pour la mesure algébrique d'un bipoint.

Le mouvement d'un voilier en mer

Le trajet d'un voilier en mer est défini par la résultante de différentes forces qui s'exercent sur lui. Ces forces proviennent de son déplacement sur l'eau (le cap), la direction du vent et la direction du courant.
Si on représente chacune des directions par un vecteur on peut, à tout moment, repèrer la position du voilier.



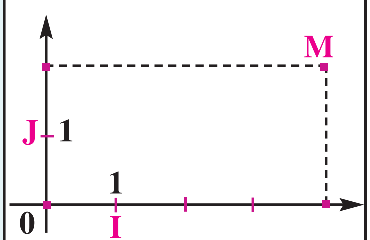
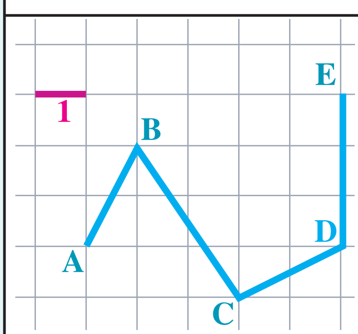
Pour se repèrer en mer les navigateurs arabes du 10ème, 11ème, 12ème et 13ème siècle utilisaient non pas le calcul vectoriel qui a été élaboré plus tard, mais les instruments tels que la boussole, l'astrolabe... et des techniques de calcul maritime très developpées.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représente le cap.

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AV}$ représente la dérive occasionnée par le vent et le courant.
Le voilier va se trouver au point B' tel que $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}$.

Reprendre

Pour chaque énoncé, on propose trois réponses A, B et C. Une ou plusieurs sont correctes. Lesquelles ?

<table>
<tr><th>Réponses / Enoncés</th><th>A</th><th>B</th><th>C</th></tr>
<tr><td>Sur la droite graduée D munie d’un repère (O, I), le point A a pour abscisse 2 et le point B a pour abscisse -3.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Sur une droite graduée de repère (O, I), si l’abscisse du point M est x et si le point P est le symétrique de M par rapport à I alors</td><td>l’abscisse de P est -x.</td><td>l’abscisse de P est 2 – x.</td><td>l’abscisse de P est x – 1.</td></tr>
<tr><td>
Dans le repère (O,I,J),</td><td>l’abscisse de M est égale à 2.</td><td>le point M a pour coordonnées (2,4).</td><td>le point M a pour coordonnées (4,2).</td></tr>
<tr><td>
L =AB+BC+CD+DE.</td><td>L = 2+5+2+3.</td><td>L = $\sqrt{12}$ + 5.</td><td>L = 3+ 2$\sqrt{5}$ + $\sqrt{13}$.</td></tr>
</table>

Repère cartésien d'une droite

Activité 1 Abscisse d'un point

Dans la figure ci-dessous, la droite Δ est munie du repère (O, I).

1- Reproduire la figure.
2- Placer les points A,B et C d'abscisses respectives -1, 2 et 5.

3- Ecrire les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{OI}$.

4- Soit M un point d'abscisse x. Ecrire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{OI}$.

On dit que (O, $\overrightarrow{OI}$) est un repère cartésien de la droite Δ.
Le point O est dit l'origine du repère.

Définition

Soit Δ une droite munie d'un repère cartésien (O,$\overrightarrow{OI}$). Soit M un point de Δ.

L'abscisse du point M dans le repère (O, $\overrightarrow{OI}$) est l'unique réel x tel que

$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI}$.

Activité 2 Milieu d'un segment

Soit Δ une droite munie d'un repère cartésien (O, $\overrightarrow{OI}$).
Soit A et B deux points distincts d'abscisses respectives x_A et x_B.
1- On désigne par K le point de Δ d'abscisse $\dfrac{x_A + x_B}{2}$.

2- Que représente le point K pour le segment [AB] ?

3- Ecrire le vecteur $\overrightarrow{OK}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{OI}$.

Activité 3 Mesure algébrique d'un vecteur

Soit Δ une droite munie d'un repère cartésien (O, $\overrightarrow{OI}$).
On désigne par A, B et N les points de Δ d'abscisses respectives x_A, x_B et $x_B - x_A$.

1- Ecrire $\overrightarrow{ON}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$.

2- Montrer que les segments [OB] et [NA] ont même milieu.

3- En déduire $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$.

Définition

Soit Δ une droite munie du repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$.
Soient A et B deux points de Δ d'abscisses respectives x_A et x_B. On a

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\overrightarrow{OI}$.

La mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le réel $x_B - x_A$.
On note $\overline{AB} = x_B - x_A$.

Activité 4 Distance entre deux points

Dans la figure ci-dessous la droite Δ est munie du repère $(O, \overrightarrow{OI})$.

1- Placer les points A, B, et C tels que

$\overrightarrow{OA} = -1{,}5\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{OI}$.

2- Calculer les distances OA, OB, OC en fonction de OI.

3- Que valent ces distances lorsque OI = 1 ?

Le vecteur $\overrightarrow{OI}$ est dit unitaire si OI = 1.

Activité 5 Mesures algébriques de vecteurs égaux – Mesures algébriques de vecteurs colinéaires

Soit Δ une droite munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$.
On désigne par A , B, C et D quatre points de Δ d'abscisses respectives x_A, x_B, x_C et x_D.

1- Soit N et N' les points d'abscisses respectives $(x_B - x_A)$ et $(x_D - x_C)$.

a) Montrer que si $x_B - x_A = x_D - x_C$ alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

b) Montrer que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors les points N et N' sont confondus.

c) Que peut-on dire des mesures algébriques de deux vecteurs égaux ?

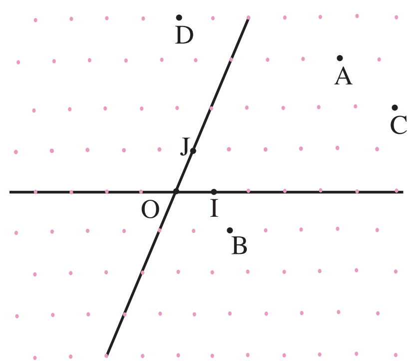
2- Soit k un réel non nul.

a) Que peut-on conjecturer sur la mesure algébrique du vecteur $k\overrightarrow{AB}$?
b) Que peut-on conjecturer sur les mesures algébriques de deux vecteurs colinéaires ?

Repère cartésien du plan

Activité 6

Coordonnées d'un point
Reproduire la figure ci-contre où (O, I, J) est un repère du plan et où A, B, C et D sont quatre points donnés.



1- a) Quelles sont les coordonnées des points A, B, C et D ?

b) Compléter : $\overrightarrow{OA} = \ldots\overrightarrow{OI} + \ldots\overrightarrow{OJ}$,

$\overrightarrow{OB} = \ldots\overrightarrow{OI} + \ldots\overrightarrow{OJ}$, $\overrightarrow{OC} = \ldots\overrightarrow{OI} + \ldots\overrightarrow{OJ}$,

$\overrightarrow{OD} = \ldots\overrightarrow{OI} + \ldots\overrightarrow{OJ}$.

2- Placer un point M de coordonnées (x, y).
La parallèle à (OJ) passant par M coupe (OI) en N. Placer N.
La parallèle à (OI) passant par M coupe (OJ) en P. Placer P.

a) Justifier l'égalité $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

b) Compléter l'égalité $\overrightarrow{OM} = \ldots\overrightarrow{OI} + \ldots\overrightarrow{OJ}$.

Soit O, I et J trois points non alignés.

Alors $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est un repère cartésien du plan.
Le point O est l'origine du repère.

$(O, \overrightarrow{OI})$ est l'axe des abscisses.

$(O, \overrightarrow{OJ})$ est l'axe des ordonnées.

Définition

Soit $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ un repère cartésien du plan et soit M un point du plan.
Le couple de coordonnées du point M est l'unique couple de réels (x, y) tels que

$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$.
Le réel x est l'abscisse de M et le réel y est l'ordonnée de M.

Activité 7

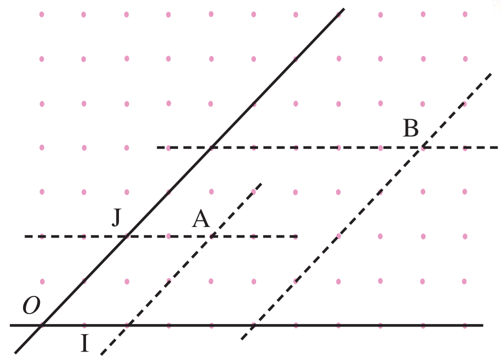
Composantes d'un vecteur
Observer la figure suivante où $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est un repère cartésien du plan.

1- Soit M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

Vérifier que $\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$.

2- En déduire que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$.
Calculer $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$. Que remarque-t-on ?
3- Placer deux points E et F tels que

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$. Calculer $x_F - x_E$ et $y_F - y_E$.
Que remarque-t-on ?

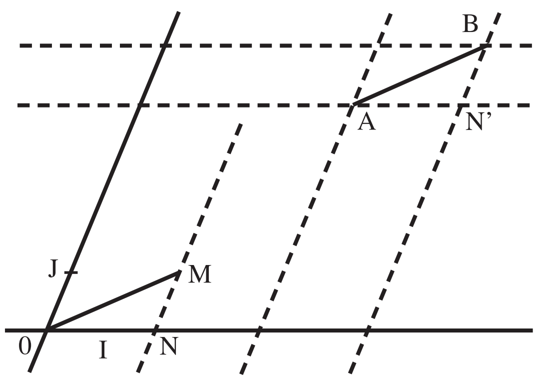


Activité 8 **Pour démontrer**

Le plan est muni du repère cartésien

$(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Les points A et B ont pour coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B). La parallèle à (OJ) passant par B et la parallèle à (OI) passant par A se coupent en N'.

Le point M est tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
La parallèle à (OJ) passant par M coupe (OI) en N.



1- Quelle est l'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$?

2- Quelle est l'image du point N par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$?

3- a) Ecrire $\overrightarrow{ON}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$.

b) Ecrire $\overrightarrow{NM}$ en fonction de $\overrightarrow{OJ}$.

c) En déduire que $\overrightarrow{OM} = (x_B - x_A)\,\overrightarrow{OI} + (y_B - y_A)\,\overrightarrow{OJ}$.

d) Ecrire $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

4- Soit E et F deux points tels que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.
On désigne par (x_E, y_E) et (x_F, y_F) les coordonnées respectives de E et F.
La parallèle à (OJ) passant par F et la parallèle à (OI) passant par E se coupent en P'.

a) Faire une figure.

b) Quelle est l'image de N' par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$?

c) Comparer $x_B - x_A$ et $x_F - x_E$. Comparer $y_B - y_A$ et $y_F - y_E$.

d) Que peut-on dire des composantes de deux vecteurs égaux ?

Définition

Soit $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ un repère cartésien du plan et soit A de coordonnées (x_A, y_A) et B de coordonnées (x_B, y_B). On a

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\overrightarrow{OI} + (y_B - y_A)\,\overrightarrow{OJ}.$$

Le couple $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ est appelé couple de composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$

et on note $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Activité 9 Coordonnées du milieu d'un segment

Dans le plan muni d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on considère deux points distincts A et B et on désigne par C le milieu du segment [AB].
Ecrire les coordonnées de C en fonction de celles de A et B.

Activité 10 Composantes de vecteurs colinéaires

Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, placer les points A(-1, 2), B(1, 1) et C(1, 2).

1- Quelles sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$?

2- a) Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$.

b) Lire les coordonnées de D et en déduire les composantes de $\overrightarrow{AD}$.

c) Calculer les rapports $\dfrac{x_D - x_A}{x_B - x_A}$ et $\dfrac{y_D - y_A}{y_B - y_A}$. Que remarque-t-on ?

3- a) Construire le point E tel que $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{AB}$.

b) Lire les coordonnées de E et vérifier que $x_E - x_C = 3(x_B - x_A)$ et $y_E - y_C = 3(y_B - y_A)$.

4- a) Placer deux points distincts F et H de sorte que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FH}$ soient colinéaires.

b) Comparer les rapports $\dfrac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$ et $\dfrac{x_H - x_F}{y_H - y_F}$.

5- Quelle conjecture peut-on faire sur les composantes de deux vecteurs colinéaires ?

Distance de deux points dans un repère orthonormé.

Activité 11 Distance entre deux points

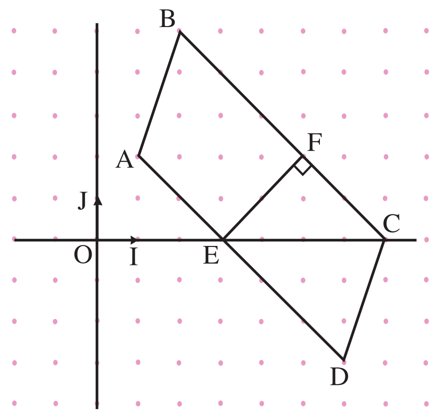
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.
La droite passant par A et parallèle à (OI) et la droite passant par B et parallèle à (OJ) se coupent en C.
1- Exprimer AC^2 et BC^2 en fonction de x_A, y_A, x_B et y_B.

2- En déduire que $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

> Le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est dit orthogonal si les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires et il est dit orthonormé si de plus OI = OJ = 1.

Activité 12

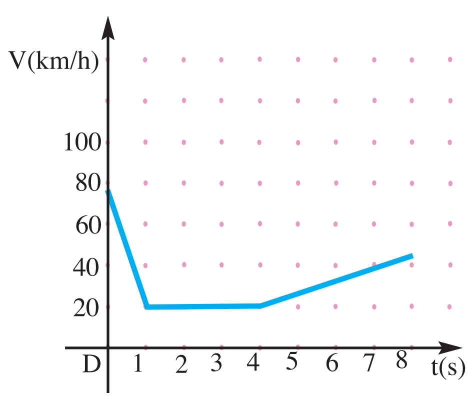
Dans la figure ci-contre $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est un repère orthonormé.
1- Lire graphiquement les coordonnées des points A, B, C, D, E et F.
2- Montrer que ABCD est un parallélogramme .
3- Calculer les distances AB, AD et EF.
4- Calculer l'aire de ABCD.
5- Soit H le projeté orthogonal de A sur (CD). Calculer AH.



Lecture graphique

Activité 13

Le graphique ci-contre décrit les variations de la vitesse d'une automobile à chaque instant t au cours de son déplacement.
1- Comment varie la vitesse entre 0s et 1s?
2- Déterminer la vitesse de l'automobile entre 1s et 4s.
3- Comment varie la vitesse entre 4s et 7s?
4- On sait que le trajet de l'automobile comprend une pente, une descente et une route horizontale.
A quelle partie du graphique correspond chacune des phases du trajet ?



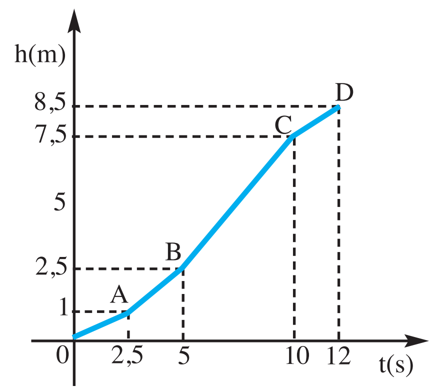
Activité 14 La montée d'un ascenseur entre deux étages est décrite par le graphique ci-contre.

1- a)Quelle distance a parcourue l'ascenseur entre 0s et 5s ?

b) Quelle distance a parcourue l'ascenseur entre 5s et 10s ?

c) Expliquer pourquoi ces distances ne sont pas égales.

2- Comparer les vitesses de l'ascenseur entre 0s et 2,5s et entre 10s et 12s.



Activité 15 La figure ci-contre décrit le mouvement d'un cycliste et d'un automobiliste le long d'une même route.

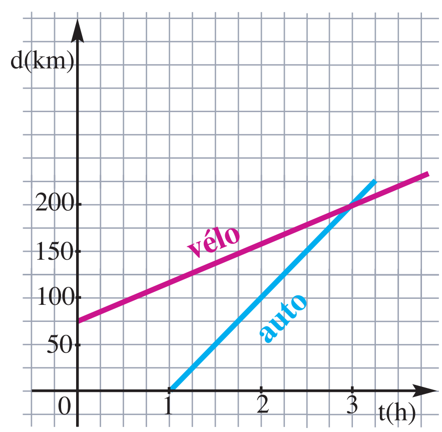
1- Lire sur le graphique l'heure et la position du cycliste et de l'automobiliste au moment du départ.

2- a) Calculer en km/h la vitesse du cycliste et celle de l'automobiliste.

b) Quelle distance les sépare à 1h ?

c) Quelle distance les sépare à 1h 30 ?

3- Donner l'heure et la position de leur point de rencontre.

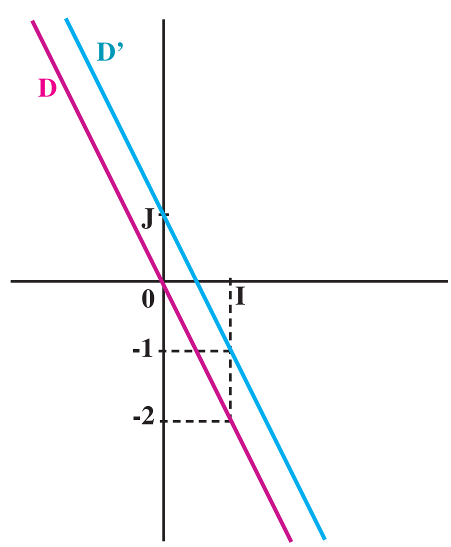


Activité 16 Dans le graphique suivant, les droites D et D' sont les représentations graphiques respectives des fonctions $f(x) = -2x$ et $g(x) = -2x + 1$ dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

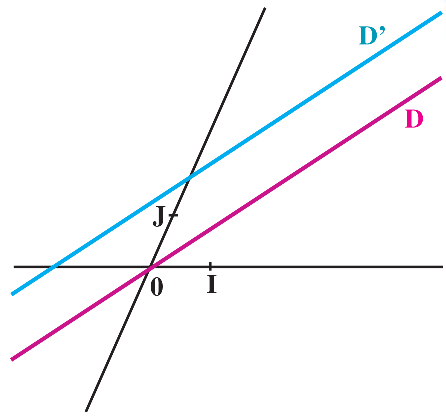
1- Sur quelle droite se trouvent les points A(1 , -1) et J(0, 1) ?

2- Sur quelle droite se trouve le point C(1, -2) ?

3-Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{JA}$ et $\overrightarrow{OC}$ et en déduire les positions relatives des droites D et D'.



Activité 17 Le plan est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Dans le graphique ci-contre, les droites D et D' sont les représentations graphiques respectives des fonctions f et g telles que $f(x) = ax$ et $g(x) = ax + b$.



1- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite D' avec les axes.

2- Montrer que D et D' sont parallèles.

3- Soit h une fonction affine telle que $h(x) = ax + c$.

On désigne par D'' la représentation graphique de h.

Etudier la position relative de D, D' et D''.

Retenir

Repère cartésien d'une droite

◊ Soit Δ une droite munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$.
Soient A, B, C et D quatre points de Δ d'abscisses respectives x_A, x_B, x_C et x_D et k un réel.
On a

- $\overrightarrow{OA} = x_A\overrightarrow{OI}$.
- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\overrightarrow{OI}$.
- Le milieu I du segment [AB] a pour abscisse $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $x_B - x_A = x_D - x_C$.
- $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ équivaut à $x_B - x_A = k\,(x_D - x_C)$.
- Si le repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$ est tel que $\overrightarrow{OI}$ est unitaire alors $AB = |x_B - x_A|$.

Repère cartésien du plan

◊ Soit $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ un repère du plan.
Soient A, B, C et D quatre points de coordonnées respectives (x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C) et (x_D, y_D) et k un réel. On a

- $\overrightarrow{OA} = x_A\overrightarrow{OI} + y_A\overrightarrow{OJ}$.
- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\overrightarrow{OI} + (y_B - y_A)\overrightarrow{OJ}$.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $x_B - x_A = x_D - x_C$ et $y_B - y_A = y_D - y_C$.
- Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.
- $k\overrightarrow{AB} = k(x_B - x_A)\overrightarrow{OI} + k(y_B - y_A)\overrightarrow{OJ}$.
- $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ équivaut à $x_B - x_A = k(x_D - x_C)$ et $y_B - y_A = k(y_D - y_C)$.
- Si le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est orthonormé alors

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ et $OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}$.

Droites parallèles

◊ Les représentations graphiques de deux fonctions affines ayant même coefficient sont parallèles.

Mobiliser ses compétences

Déterminer les coordonnées d'un point dans un repère

Situation 1

Soit Δ une droite munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$ tel que $\overrightarrow{OI}$ est unitaire.
On donne les points A, B et C sur Δ
tels que

$x_A = 2$, $\overline{IB} = 3$ et $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{IA}$

1- Calculer x_B et x_C et placer les points B et C.
2- Calculer les distances AC, CB, AC + CB et AB.
3- Les segments [IC] et [AB] ont-ils le même milieu ?

Stratégie de résolution

1- Penser à l'expression de la mesure algébrique d'un vecteur.
Penser aux mesures algébriques de deux vecteurs colinéaires.
2- Penser à l'expression de la distance entre deux points.

Situation 2

Soit Δ une droite munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$ tel que $\overrightarrow{OI}$ est unitaire.

On donne les points A et B sur Δ d'abscisses respectives $-\sqrt{2}$ et 0,5.

1- Déterminer les points M de Δ tels que OM = 3.
2- Déterminer les points N de Δ tels que AN = 1.
3- a) Déterminer graphiquement les points M de Δ tels que BM < 1.
b) Retrouver les résultats par le calcul.

Stratégie de résolution

1- Penser à l'expression de la distance OM.
2- Penser à l'expression de la distance AN.
3- Penser au cercle de centre B et de rayon 1.

Situation 3

Dans le plan muni d'un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, marquer les points A(1, 4), B(3, 1) et C(-3, -1).
Marquer le point D symétrique du point B par rapport au milieu du segment [AC]
et calculer ses coordonnées.

Stratégie de résolution

Nommer le milieu de [AC] et calculer ses coordonnées.
Penser aux composantes de deux vecteurs égaux.

Points alignés et vecteurs colinéaires

Situation

Dans le plan muni d'un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on considère les points A(2, 3), E(-2,1) et C(3, 2).
a- Les points A, E et C sont-ils alignés ?
b- Soit B(1, y). Déterminer le réel y pour que les points A, B et C soient alignés.
Stratégie de résolution
a- Faire une figure.

On rappelle que l'égalité $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC}$ équivaut à dire que les points A, E et C sont alignés.
b- Penser aux vecteurs colinéaires.

Nature d'un triangle

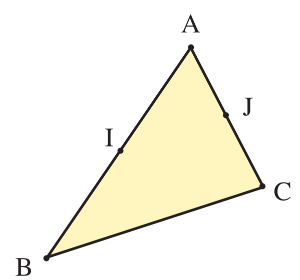
Situation

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on donne les points A(3, 1), B(0, 2), C(3, 2) et D(1, 3).
a- Faire une figure.
b- Quelle est la nature de chacun des triangles ABC et ABD ?
c- Les points A, B, C et D sont-ils sur un même cercle ?
Stratégie de résolution
b- La figure suggère que le triangle ABC est rectangle en C.
Calculer les distances AC, BC et AB et utiliser la réciproque du théorème de Pythagore pour conclure.
Utiliser la même démarche pour déterminer la nature du triangle ABD.
c- On sait qu' un triangle rectangle est inscrit dans un cercle de diamètre son hypoténuse.

Droite des milieux

Situation 1

Dans la figure ci-contre ABC est un triangle.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].

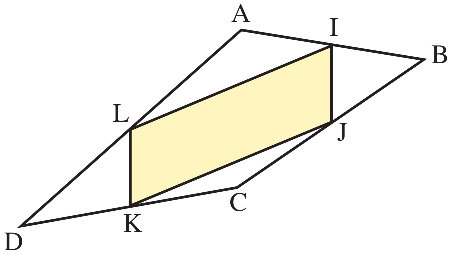


On munit le plan du repère $(A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$.
1- Ecrire les coordonnées des points A, I, B, C et J.

2 -a) Ecrire les composantes des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$.
b) Que remarque-t-on ?
Stratégie de résolution
2- b) Comparer $x_J - x_I$ à $x_C - x_B$ puis $y_J - y_I$ à $y_C - y_B$. Conclure.

Situation 2

Dans la figure ci-contre ABCD est un quadrilatère.
Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [DC] et [AD].



1- Montrer que $\overrightarrow{LI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.

2- a) Montrer que $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{KJ}$.
   b) En déduire la nature du quadrilatère IJKL.

3- Que peut-on dire du quadrilatère IJKL lorsque les diagonales du quadrilatère ABCD sont perpendiculaires ?

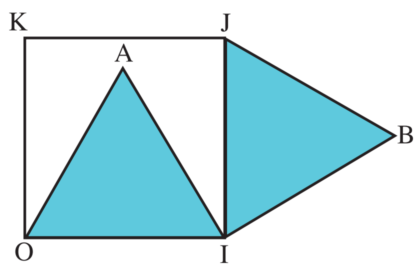
4- Que peut-on dire du quadrilatère IJKL lorsque les diagonales du quadrilatère ABCD sont de même longueur ?

Stratégie de résolution

1- Considérer le repère (A, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$).
3- Prouver que les droites (IL) et (KL) sont perpendiculaires puis conclure.
4- Comparer IL et KL puis conclure.

Choisir un repère pour résoudre un problème d'alignement

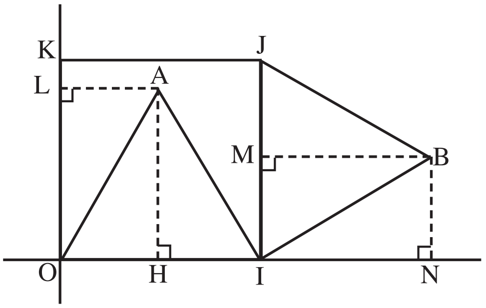
Situation



Observer la figure ci-contre où OIJK est un carré et OIA et IJB sont des triangles équilatéraux.

En considérant le repère (O, $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OK}$),
1- Déterminer les coordonnées des points A et B.
2- Montrer que les points K, A et B sont alignés.

Stratégie de résolution



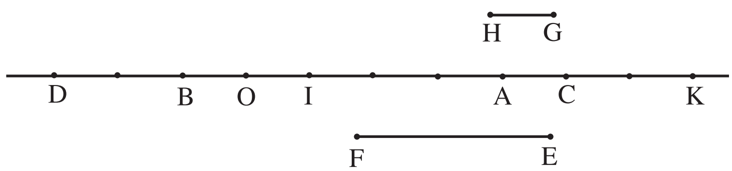
1- Dans le repère (O, $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OK}$),
Les points A et H ont même abscisse.
Les points A et L ont même ordonnée et AH = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On peut en déduire les coordonnées de A.
Les points B et N ont même abscisse.
Les points B et M ont même ordonnée.
On peut en déduire les coordonnées de B.
2- Utiliser une égalité vectorielle qui traduit l'alignement de trois points.

s'auto-évaluer

Vrai ou faux

1- Dans la figure ci-dessous, la droite (AB) est munie du repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$

tel que $\overrightarrow{OI}$ est unitaire. Les points E, F, G et H sont tels que $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{BO}$ et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AI}$.



Répondre par vrai ou faux.
a- AB = OC.
b- C est le milieu de [AK].
c- Les segments [AD] et [OI] ont le même milieu.

d- Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont égaux.

e- $\overrightarrow{EF} = -4\overrightarrow{OI}$.
f- Le quadrilatère EFHG est un parallélogramme.

2- Le plan est muni d'un repère$(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Répondre par vrai ou faux et justifier.

a- Si A (2, 5), B (-4, 1) et K est le milieu du segment [AB] alors K a pour coordonnées (-2, 3).

b- Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}$ alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

c- Si $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ alors les droites (EF) et (GH) sont sécantes.

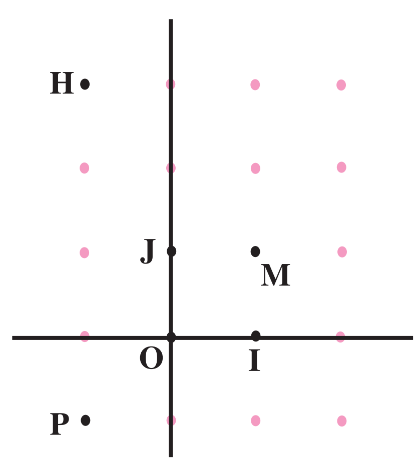
d- Si D et D' sont les représentations graphiques respectives des fonctions f et g définies par f(x) = 2x + 3 et g(x) = 3x + 2 alors les droites D et D' sont parallèles.

Observer et compléter

Observer la figure ci-contre où $(O,\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est un repère.
Compléter

a- $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}-2\\ \dots\end{pmatrix}$. b- $\overrightarrow{MO}\begin{pmatrix}\dots\\-1\end{pmatrix}$. c- $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$

d- Les composantes de $\overrightarrow{HP}$ sont...



Exercices et problèmes

Appliquer

1 Soit (D) une droite munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$ tel que OI = 1.
1- Placer sur (D) les points A, B, C, E, F et G définis par

$x_A = -1$; $\overline{AC} = 4$; $\overline{CB} = -7$; $\overline{OE} = \frac{3}{4}$;

$\overline{CF} = 7$ et $\overline{AG} = -\overline{BC}$.
2- Comparer OC et AB puis CB et CF.

2 On donne une droite Δ et $(O, \overrightarrow{OI})$ un repère cartésien de Δ tel que OI = 1.
1- Trouver les abscisses respectives des points M, N, K et G définis par :

$\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OK} = \frac{7}{4}\overrightarrow{OI}$

et $\overrightarrow{GO} = \frac{13}{2}\overrightarrow{OI}$.

2- A, B et C sont trois points de Δ d'abscisses respectives -4, 2 et $\sqrt{2}$.

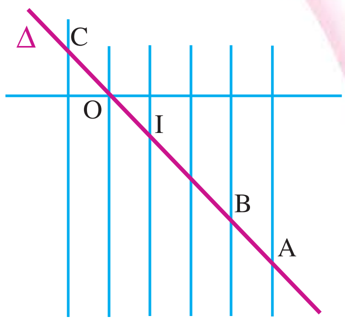
Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{OA}$,

$\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$.
3- Soit P un point de Δ d'abscisse x.
Déterminer x pour que l'on ait AP < CO.

3 Soit Δ une droite munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$ tel que OI = 1.

1- Placer les points A, B, C et D définis par $x_A = -4$, $\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{BC} = -5\overrightarrow{OI}$
et D est le symétrique de A par rapport à O.
2- Quelle est l'abscisse du milieu du segment [BC] ?
3- Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$.
4- Déterminer l'ensemble des points M de la droite Δ tels que MA = 2.

4 Dans la figure ci-contre,

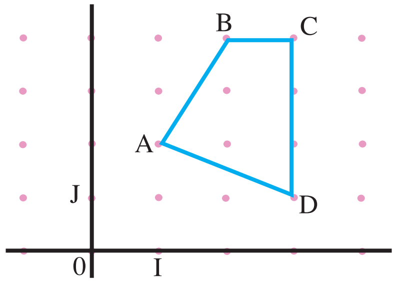


$(O, \overrightarrow{OI})$ est un repère cartésien de la droite Δ tel que OI = 1.
Les droites colorées en bleu sont parallèles et à égale distance.
1- Quelles sont les abscisses des points A, B et C dans Le repère $(O, \overrightarrow{OI})$?
Expliquer.
2- Calculer les distances BC et BI.

5 1-Tracer une droite Δ et marquer sur cette droite deux points A et C.
Placer le point B de [AC] tel que BC = 4 et AB = 1. Placer le point I milieu du segment [AB].
2-Recopier le tableau suivant et le compléter en calculant dans chaque case l'abscisse du point considéré.

Repère / Point	$(A, \overrightarrow{AB})$	$(A, \overrightarrow{AC})$	$(B, \overrightarrow{BC})$
A			
B			
C			
I			

6 Le plan est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.



Lire les composantes de chacun des vecteurs :
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$.

7 Le plan est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Soient M(4, -3), N(-5, 1) et P($\frac{1}{2}$, - $\frac{3}{2}$).
Donner les composantes de chacun des vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{MP}$, $\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$ et $-\overrightarrow{PN}$.

8 Le plan est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Dans chaque cas, calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $-3\overrightarrow{AB}$.

Coordonnées du point A	(2, 0)	(11, 5)	(0, 4)	($-\frac{1}{3}$, 1)	($\frac{5}{6}$, 3)
Coordonnées du point B	(-1, 2)	(4 ,-3)	(3, 0)	($\frac{2}{5}$, -3)	($\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{5}$)

9 Le plan est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. On donne E(2, - 5).
Placer le point B tel que le vecteur $\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{OI} + 4\overrightarrow{OJ}$.

10 Le plan est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Soient A(-2, 1) et B(3, -4).
Calculer les coordonnées du point C sachant que $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{BA}$.

11 Le plan est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
Déterminer dans chaque cas les coordonnées qui manquent, sachant que C est le milieu du segment [MN].

M	(6, 3)		($\frac{3}{5}$, -2)
N		(-15, 9)	
C	(3, -5)	(0, 2)	(2, 1)

12 Le plan est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
a) Placer le point A(1, 3) puis construire les points B, C, D et E définis par
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$.
b) Les points A, O et C sont-ils alignés ?
c) Quelle est la nature du quadrilatère ADEB ?

13 Le plan est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Soient A(1, -1), B(2, 3), C(1, 4), D(-5, 3) et E(-6, -1).
1- Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
2- Quelles sont les images des points A, O et E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$?
3- Placer le point H défini par $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$. Calculer les coordonnées du point H.

14 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
Dans chacun des cas suivants, calculer la distance MN.

	1	2	3	4	5
M	(-1, 2)	(-4, -6)	(0,5, 2)	$(-\frac{1}{2}, \sqrt{2})$	(1, 1)
N	$(\frac{1}{3}, 1)$	$(-7, \frac{1}{2})$	(-4,2, 3)	$(\frac{3}{2}, \sqrt{2})$	$(\frac{3}{3}, 1)$

15 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. On donne les points A(5, 0), B(7, 6), C(1, 4) et D(-1, -2).
1- Faire une figure.
2- Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
3- Calculer AB et AD.
4- En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

16 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. On donne les points A(3, 1), B(5, -3), C(1, 7), D(-2, -4) et P(-5, 17).
1- Faire une figure.
2- Montrer que les points A, B et P sont alignés.
3- Montrer que PA = 4AB.
4- Les droites (AD) et (BC) sont-elles parallèles ?

Maîtriser

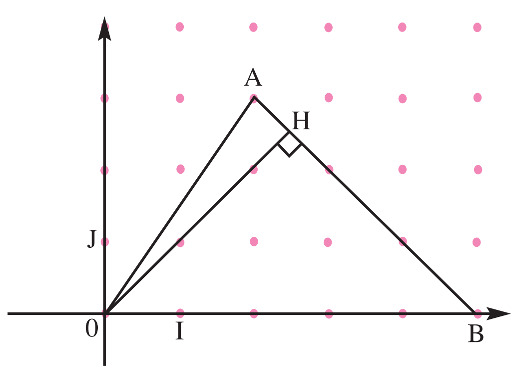
17 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. On considère les points A(1, -2), B(3, 2) et C(7, 0).
1- Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
2- Montrer que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
3- Calculer AC et BD puis déduire la nature du quadrilatère ABCD.

18 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. On donne les points E(3, 1), M(0, 4) et R(3, y).
1- Déterminer y pour que le triangle MER soit isocèle en E. Faire une figure dans ce cas.
2- Le triangle MER peut-il être équilatéral ? Expliquer.

19 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Soit (C) un cercle de centre I (2, -3) et de rayon R = 2cm.
1- Le point K(2, -1) appartient-il au cercle (C) ?
2- Soit S $(\sqrt{2}, -1)$. Démontrer que la droite (SK) est tangente au cercle (C).

20 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. On donne les points E(4, 0) et F(-1, 3).
Trouver une valeur approchée de l'angle $\widehat{OEF}$ à 0,01 près.

21 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Observer la figure ci-dessous.
a) Calculer l'aire du triangle OAB puis déduire OH.

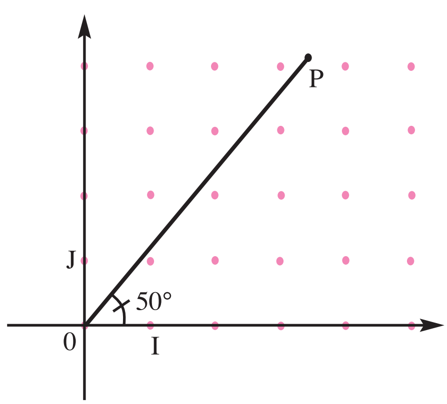


b) Calculer sin $\widehat{OAB}$ et cos $\widehat{OAB}$.

c) Vérifier l'égalité

$OB^2 = AB^2 + AO^2 - 2AO.\ AB\cos\widehat{OAB}$.

22 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Dans la figure ci-dessous OP = 8. Déterminer des valeurs approchées à 10^{-2} près des coordonnées du point P.



23 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Placer les points A(-3, 0), B(2, 1), C(4, 3) et D(-1, 2).

1- Montrer que les segments [AC] et [BD] ont le même milieu K.

2- Montrer que le triangle OBD est rectangle et isocèle.

3- Soit E le point tel que BODE soit un parallélogramme. Quelles sont les coordonnées de E ?

4- Quelle est la nature du quadrilatère AOCE ?

24 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Placer les points A(3, 2), B(-1, -2) et C(5, -1). Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Calculer AG.

25 Soit ABCD un parallélogramme et E et F les points de la diagonale [AC] tels que

AE = EF = FC. La droite (DF) coupe le côté [BC] en I.

1- Donner les coordonnées des points E et F dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

2- Montrer que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AF}$ et que les droites (EB) et (FI) sont parallèles.

3- En déduire que I est le milieu de [BC].

26 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Tracer la droite D d'équation y = x + 2. Soit A(2, 1) et un point M (x, y) de la droite D.

1- Exprimer la distance AM en fonction de x seulement.

2- Déterminer x et y pour que la distance AM soit minimale. Quelle est alors la distance de A à la droite D ?

Avec l'ordinateur

A l'aide d'un logiciel :

- Construire un repère orthonormé (O, $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$).
- Placer les points A(1, 3) ; B(-3, 3) et C(1, 2).

Les droites (AB) et (AC) sont-elles perpendiculaires ? Expliquer.

- Construire le point E symétrique du point B par rapport au point A.
- Construire le point F symétrique du point C par rapport à la droite (AB).

Quelles sont les coordonnées de E et F ?

- Mesurer les distances EF, EC, FB et BC.

Quelle est la nature du quadrilatère BCEF ?

Math - Culture

René Descartes
1596 - 1650
«Je pense donc je suis»

Philosophe, mathématicien et physicien français du 17ème siècle, on lui doit la création de la géométrie analytique et la découverte des principes de l'optique géométrique.
Avoir un esprit cartésien c'est être clair, logique, méthodique rationnel et solide.

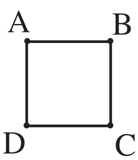
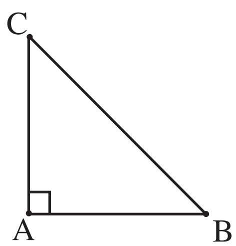
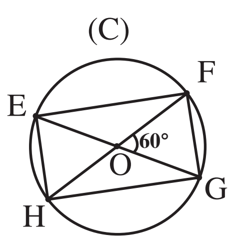
Le renouveau de la géométrie

Durant les deux siècles précédents, la puissance et le succès des méthodes analytiques avaient fait passer au second plan les questions de géométrie synthétique, héritières des éléments d'Euclide.

Chapitre 7 Quart de tour

Reprendre

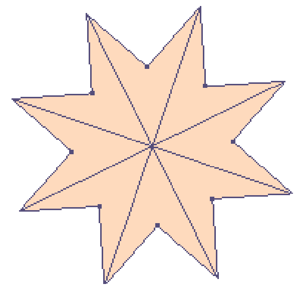
Pour chaque énoncé, on propose trois réponses A, B et C. Une ou plusieurs sont correctes. Lesquelles ?

Réponses / Enoncés	A	B	C
ABCD est un carré. 	Le carré n'a pas d'axe de symétrie.	Le carré a quatre axes de symétrie.	Le carré a un centre de symétrie.
ABC est un triangle isocèle rectangle. 	Le milieu de [BC] est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.	Le milieu de [BC] est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.	Le symétrique du triangle ABC par rapport à (AC) est un triangle isocèle de sommet principal A.
	Le quadrilatère EFGH est inscrit dans le cercle (C).	$\widehat{OEF} = \widehat{OFE}$.	Le quadrilatère EFGH est un losange.

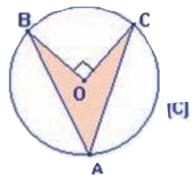
Symétries – Translations

Activité 1

1- On a construit la figure ci-contre à partir de la figure (T), en utilisant des symétries. Expliquer le procédé de construction.

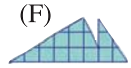


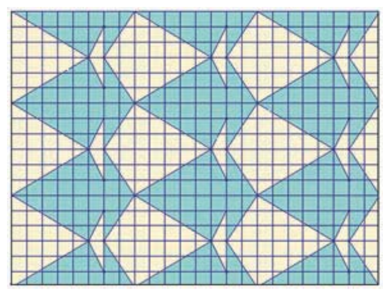
(T)



2- On a construit la figure ci-contre à partir de la figure (F), en utilisant des symétries et des translations. Expliquer le procédé de construction.

(F)





Activité 2

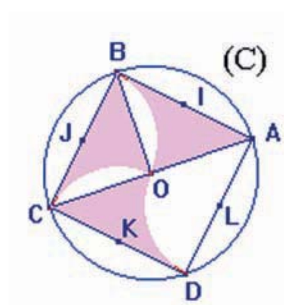
Observer la figure ci-contre où les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA] ; les arcs [$\overset{\frown}{BO}$], [$\overset{\frown}{CO}$] et [$\overset{\frown}{OD}$] sont de centres respectifs J, K et L.

1- Déterminer l'image de la figure colorée (OAB) par la symétrie centrale de centre O.

2- a) Décalquer la figure colorée et faire tourner le papier calque d'un demi-tour autour de O de sorte que le point A se transforme en C.

b) Que se passe t-il pour le point O ? Que se passe t-il pour le point B ? pour le point I ?

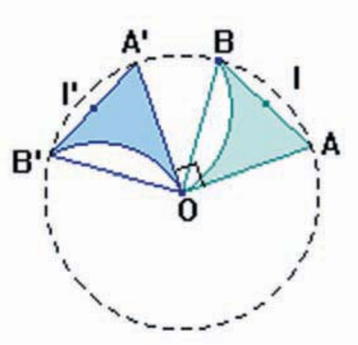
c) En quelle figure se transforme la figure (OAB) ?



> Le demi tour de centre O est la symétrie centrale de centre O.

Image d'un point par un quart de tour

Activité 3 Observer la figure ci-contre.



1- Peut-on obtenir la figure (OA'B') à partir de la figure (OAB)
- par une symétrie centrale ?
- par une symétrie axiale ?
- par une translation ?

2- Décalquer la figure (OAB) et faire tourner le papier calque d'un quart de tour autour du point O dans le sens direct de sorte que le point A se transforme en A'.

a) Que se passe t-il pour le point O ? Que se passe t-il pour le point B ? Que se passe t-il pour le point I ?

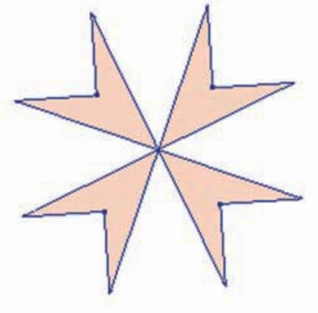
b) Quelle est la nature du triangle OBB' ? Quelle est la nature du triangle OII' ?

3- Faire tourner la figure (OAB) d'un quart de tour autour du point O dans le sens indirect. Représenter la figure obtenue.

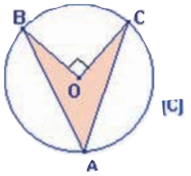
On convient que le sens direct est le sens contraire du mouvement des aiguilles d'une montre.

On convient que le sens indirect est le sens du mouvement des aiguilles d'une montre.

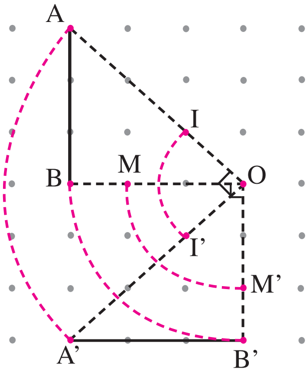
Activité 4 On a construit la figure ci-contre à partir de la figure(T) en utilisant des quarts de tour. Expliquer le procédé de construction.



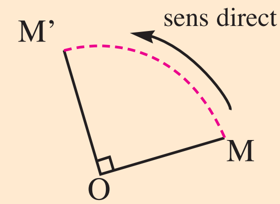
(T)



Activité 5 Observer la figure ci-contre. Quelles sont les images des points A, B, I et M par le quart de tour direct de centre O ?



Soit un point O.
L'image d'un point M distinct de O par le quart de tour direct de centre O est le point M' tel que OM = OM' et $\widehat{MOM'} = 90°$.
L'image du point O par le quart de tour direct de centre O est le point O.



L'image d'un point P distinct de O par le quart de tour indirect de centre O est le point P' tel que OP = OP' et $\widehat{POP'} = 90°$.
L'image du point O par le quart de tour indirect de centre O est le point O.

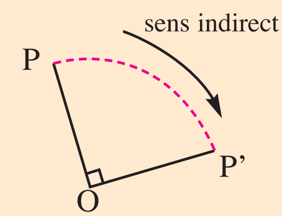


Image d'un segment

Activité 6

Conservation des distances

Soit O un point du plan. Soient A et B deux points distincts et A' et B' leurs images respectives par le quart de tour direct de centre O. On suppose que les points O, A et B ne sont pas alignés.

1- Faire une figure.

2- a) Montrer que les triangles OAB et OA'B' sont isométriques.

b) Que peut-on dire des distances AB et A'B' ?

Activité 7

Soient O un point du plan et A et B deux points distincts.

1- Construire les points A' et B' images respectives des points A et B par le quart de tour direct de centre O.

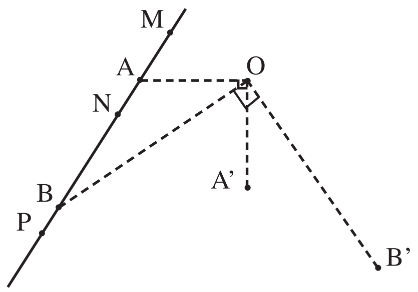
2- a) On considère un point M de [AB] et on désigne par M' son image par le quart de tour direct de centre O.
Montrer que A'M'+ M'B' = A'B' et en déduire que M' appartient à [A'B'].
b) Construire alors le point M'.

3- Soit P' un point de [A'B']. On désigne par P le point tel que P' soit l'image de P par le quart de tour direct de centre O.
a) Montrer que AP + PB = AB.
b) En déduire que P appartient au segment [AB].

Image d'une droite

Activité 8

Conservation de l'alignement



Observer la figure ci-contre où les points A' et B' sont les images respectives des points A et B par le quart de tour direct de centre O.

1- Où se trouve l'image du point N ?

2- On désigne par M' l'image de M par le quart de tour direct de centre O.

a) Montrer que les triangles OAM et OA'M' sont isométriques.

b) En déduire que O M = O M'.

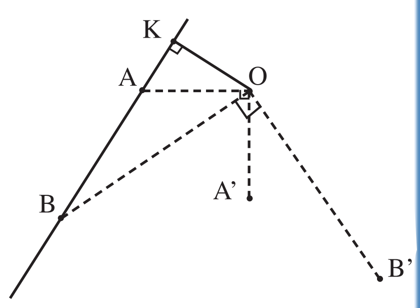
c) Montrer que O B = O B'.

d) En déduire que les points A', B' et M' sont alignés.

e) On désigne par P' l'image de P par le quart de tour direct de centre O. Montrer que les points A', B' et P' sont alignés.

Activité 9

Position relative d'une droite et son image



Observer la figure ci-contre où les points A' et B' sont les images respectives des points A et B par le quart de tour direct de centre O et où le point K est le projeté orthogonal de O sur (AB).

1- On désigne par K' l'image du point K par le quart de tour direct de centre O. Où se trouve le point K' ?

2- a) Quelle est la position relative des droites (AB) et (OK) ?

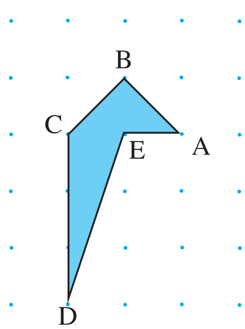
b) Montrer que les droites (OK') et (A'B') sont perpendiculaires.

c) En déduire que les droites (AB) et (A'B') sont perpendiculaires.

Figures superposables

Activité 10

Dans une feuille quadrillée



Reproduire la figure ci-contre (Respecter sa position dans le quadrillage).

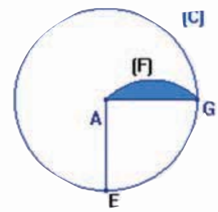
1- Construire l'image du polygone ABCDE par le quart de tour direct de centre A.

2- Comparer les mesures des angles homologues ainsi que les aires des deux polygones.

Activité 11

Figures superposables

Dans la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre A et de rayon 3cm, et l'arc $[\overset{\frown}{AG}]$ est de centre le milieu du segment [EG].



1- Montrer que les droites (AE) et (AG) sont perpendiculaires.

2- Reproduire la figure.

3- a- Calculer l'aire de la partie colorée (F).

b- Représenter l'image (F') de la partie (F) par le quart de tour direct de centre A.

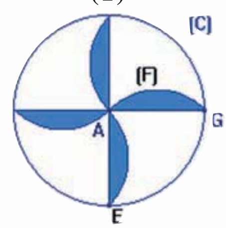
4- Vérifier que (F) et (F') sont superposables.

5- a- Représenter l'image (F'') de (F) par le quart de tour indirect de centre A.

b- Comment obtient-on (F'') à partir de (F') ?

6- Expliquer comment on peut compléter la figure pour obtenir la figure (T).

(T)

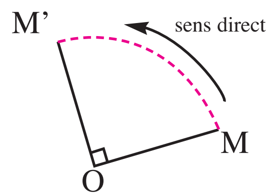


Retenir

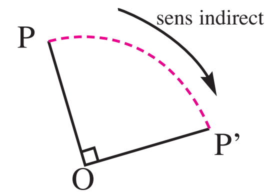
Image d'un point par un quart de tour

Soit un point O.

◊ L'image d'un point M distinct de O par le quart de tour direct de centre O est le point M' tel que OM' = OM et $\widehat{MOM'} = 90°$.

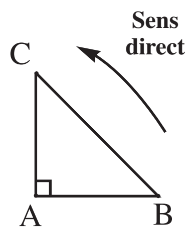


◊ L'image d'un point P distinct de O par le quart de tour indirect de centre O est le point P' tel que OP' = OP et $\widehat{POP'} = 90°$.



◊ L'image du point O par un quart de tour de centre O est le point O.

◊ ABC est un triangle rectangle isocèle en A équivaut à dire que
C est l'image de B par un quart de tour de centre A.



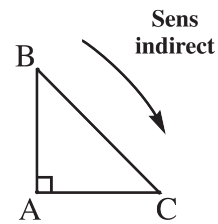


Image d'une figure

L'image d'un segment par un quart de tour est un segment qui lui est isométrique.

L'image d'une droite par un quart de tour est une droite qui lui est perpendiculaire.

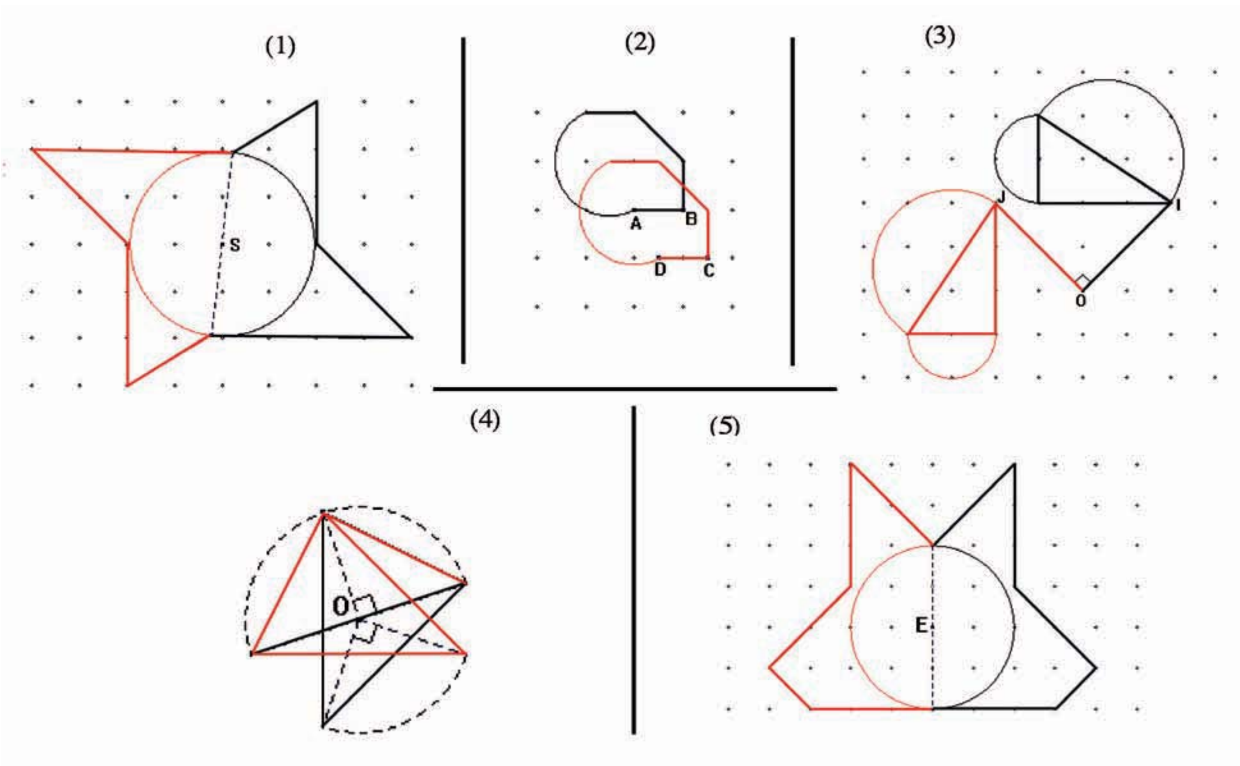
L'image d'un cercle par un quart de tour est un cercle de même rayon.

Un polygone et son image par un quart de tour sont superposables.
En particulier, ils ont la même aire, le même périmètre et leurs angles homologues sont isométriques.

Reconnaître l'image d'une figure par une transformation du plan

Situation

Dans chacun des cas suivants, la figure colorée en vert est l'image de la figure colorée en rouge par une symétrie, une translation, un quart de tour ou un demi tour.
Reconnaître ces transformations.



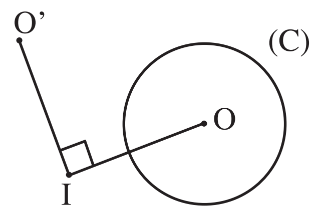
Stratégie de résolution
Cas (1)
Penser aux sommets homologues des polygones.
Cas (2)
Penser à la nature du quadrilatère ABCD.
Cas (3)
Penser à la nature du triangle OIJ.
Cas (4)
Remarquer que O est le centre du cercle circonscrit au triangle coloré en vert.
Cas (5)
Penser aux sommets homologues des polygones.

Mobiliser ses compétences

Image d'un cercle par un quart de tour

Situation

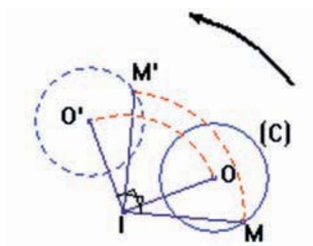
Observer la figure ci-contre où (C) est un cercle de centre O et de rayon r et le point O' est l'image du point O par le quart de tour direct de centre I.



On se propose de montrer que l'image du cercle (C) est le cercle de centre O' et de rayon r.

1- a) On considère un point M sur le cercle (C) et on désigne par M' son image par le quart de tour direct de centre I.
Construire le point M'.
b) Montrer que OM = O'M'. Que peut-on dire quant à la position du point M'?

2- On désigne par (C') le cercle de centre O' et de rayon r. Soit P' un point de (C').
On désigne P le point tel que P' soit l' image de P par le quart de tour direct de centre I.
a) Montrer que OP = O'P'.
b) En déduire que P appartient au cercle (C).



3- Construire alors l'image du cercle (C) par le quart de tour direct de centre I.

Stratégie de résolution

1- Penser à la conservation des distances.

Problèmes de constructions

Situation 1

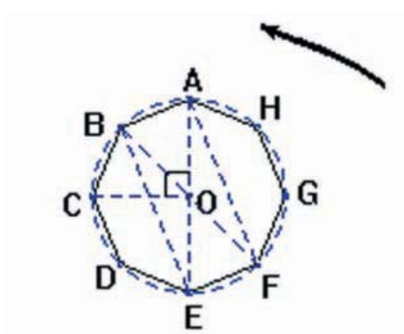
On considère une droite D et un point O.
Construire l'image de la droite D par le quart de tour direct de centre O.

Stratégie de résolution

Il suffit de choisir un point A de D puis construire son image A' par le quart de tour direct de centre O. Se rappeler qu'une droite et son image sont perpendiculaires.

Situation 2

Construire un octogone régulier ABCDEFGH connaissant son centre O et un de ses sommets.



Stratégie de résolution

Première étape

Faire une figure d'étude.

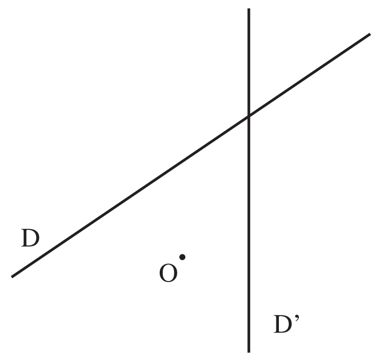
Deuxième étape

Analyser la figure :
Penser à la nature du quadrilatère ABEF.
Remarquer que les points C, D, G et H sont les images respectives des points A, B , E et F par le quart de tour direct de centre O.

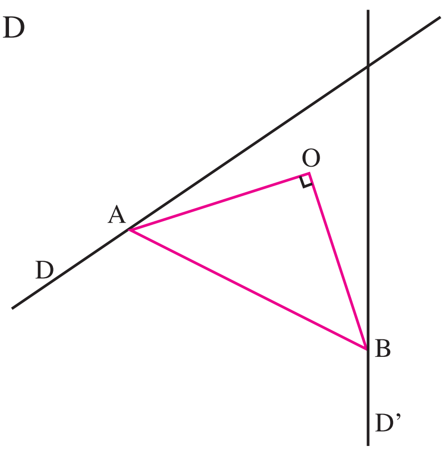
Troisième étape
Donner les étapes de construction de l’octogone.
Quatrième étape
Placer deux points O et A et faire la construction de l’octogone régulier ABCDEFGH.

Situation 3

Soient D et D' deux droites non perpendiculaires et O un point donné.
Construire un triangle OAB rectangle et isocèle en O tel que A soit un point de D et B soit un point de D’.



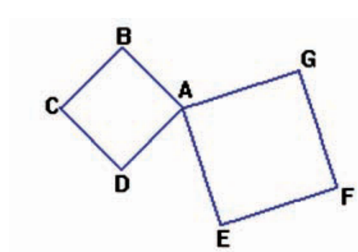
Stratégie de résolution
Première étape
Faire une figure d’étude.
Deuxième étape
Analyser la figure :
Remarquer que le point B est l’image du point A par le quart de tour direct de centre O.
Expliquer pourquoi le point B se trouve sur l’image de D par le quart de tour direct de centre O.
Troisième étape
Donner les étapes de construction du triangle.
Quatrième étape
Faire la construction.



Utiliser un quart de tour pour démontrer

Situation 1

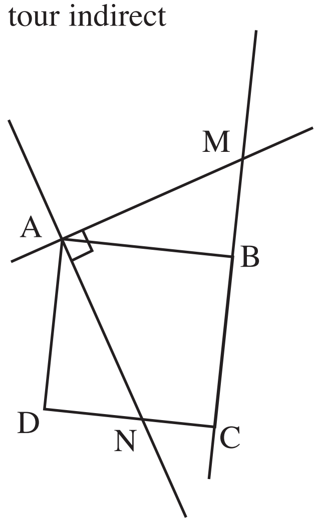
Dans la figure ci-contre ABCD et AEFG sont deux carrés.
1- Montrer que BE = DG.
2- Montrer que les droites (BE) et (DG) sont perpendiculaires.



Stratégie de résolution
1- On rappelle que l’image d’un segment par un quart de tour est un segment qui lui est isométrique. En déduire la réponse à la question en utilisant un quart de tour.
2- On rappelle que l’image d’une droite par un quart de tour est une droite qui lui est perpendiculaire.

Situation 2

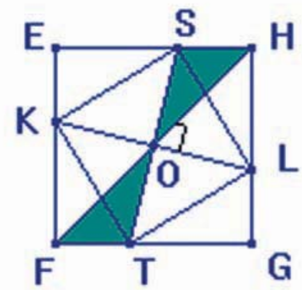
On considère un carré ABCD et un point M variable sur la droite (BC).
La perpendiculaire à la droite (AM) en A coupe la droite (CD) au point N.
1- Quelles sont les images des droites (AB) et (AM) par le quart de tour indirect de centre A ?
2- Sur quelle ligne fixe se déplace le point N lorsque M décrit la droite (BC) ?



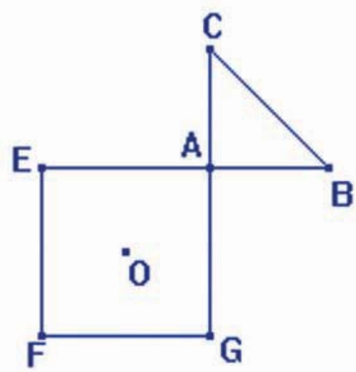
Stratégie de résolution
1- Faire une figure.
Comparer les triangles ABM et ADN.
Conclure.
2- Penser à l'image d'une droite par un quart de tour.

Vrai ou Faux

On considère la figure ci-contre où EFGH est un carré et FT = SH.
Répondre par vrai ou faux.
1- Le triangle TOF est l'image du triangle HOS par le demi tour de centre O.
2- L'image de S par le quart de tour indirect de centre O appartient au segment [EF].
3- KSLT est un carré.



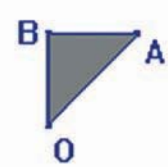
Recopier et compléter



On considère la figure ci-contre où ABC est un triangle rectangle isocèle en A et EAGF est un carré.
- Recopier et compléter :
E est l'image de G par le demi tour de centre …
C est l'image de … par le quart de tour direct de centre A
G est l'image de … par le quart de tour direct de centre A.
….est l'image de [BE] par le quart de tour direct de centre A.

Construire

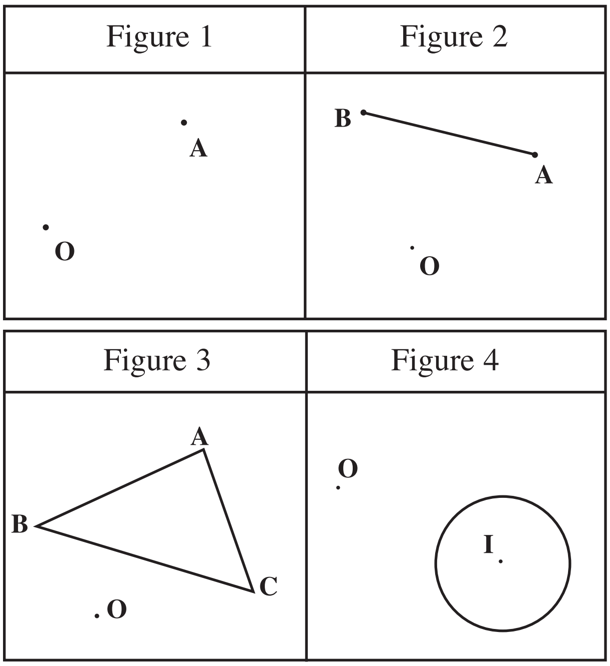
Reproduire dans un quadrillage la figure ci-contre où AOB est un triangle rectangle isocèle .
1- Construire l'image de OAB par le demi tour de centre O.
2- Construire l'image de OAB par le quart de tour direct de centre A.
3- Construire l'image de OAB par le quart de tour indirect de centre B.



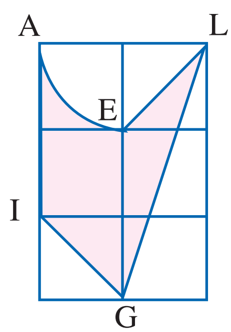
Exercices et problèmes

Appliquer

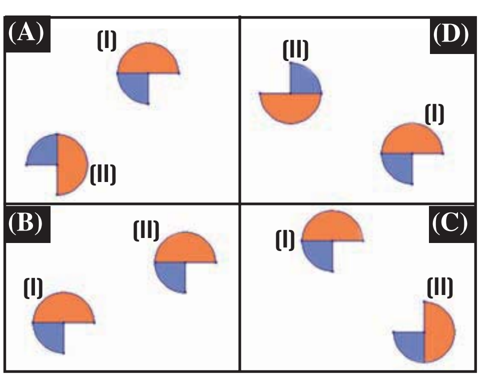
1 Reproduire chacune des figures ci-dessous puis construire son image par le quart de tour direct de centre O.



2 Reproduire sur un quadrillage la figure ci-contre. Construire l'image de cette figure par le quart de tour direct de centre A.



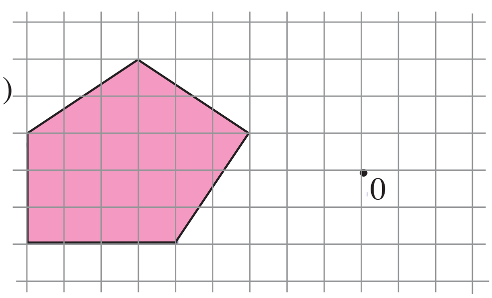
3 Chacune des phrases suivantes correspond à l'une des illustrations ci-dessous. Associer les.



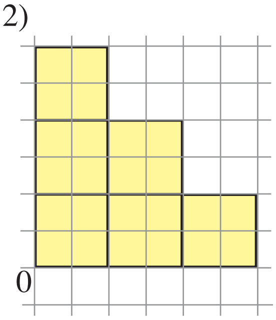
1- La figure (II) est l'image de la figure (I) par un demi-tour.
2- La figure (II) est l'image de la figure (I) par un quart de tour.
3- La figure (II) est l'image de la figure (I) par une translation.
4- La figure (II) est l'image de la figure (I) par une symétrie axiale.

4 Dans chaque cas reproduire dans un quadrillage la figure proposée et construire son image par le quart de tour indirect de centre O.

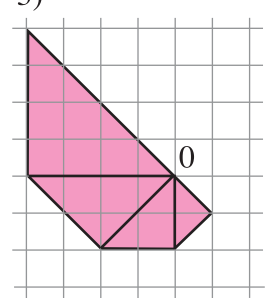
1)



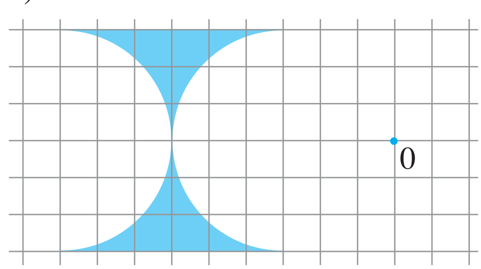
2)



3)

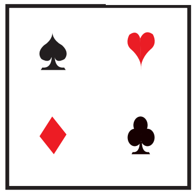


4)



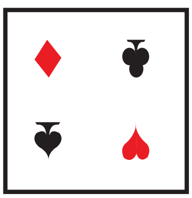
5 La carte carrée "A" représente les 4 couleurs : trèfle, pique, cœur et carreau.

" A"

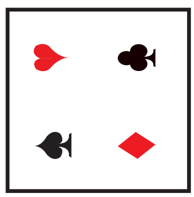


Elle a subit un quart de tour autour de son centre. Imène a reproduit l'image obtenue.

" B"

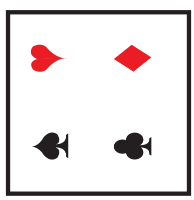


"C"



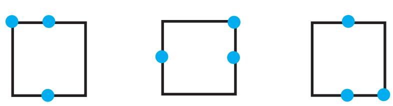
Retrouver son dessin parmi les figures "B", "C" et "D".

"D"



6 Pour chaque dessin on a reproduit l'image du précédent par le quart de tour indirect de centre le centre du carré. Dessiner le 1er et le 5ème dessin.

2ème 3ème 4ème



Maîtriser

7 ABC est un triangle tel que AB = 5cm BC = 3cm et AC = 6cm.
1- Construire B' et C' images respectives des points B et C par le quart de tour direct de centre A.
2- Calculer BB' et CC'.

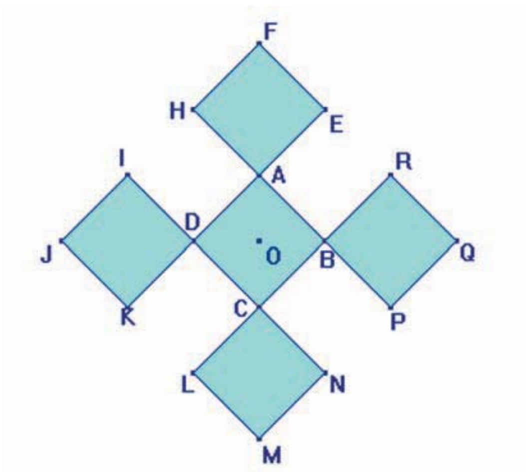
8 1- Tracer un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 4cm et AC = 3cm.
2- Construire C' image de C par le quart de tour direct de centre A.
3- Construire B' image de B par le quart de tour indirect de centre A.
4- Comparer les triangles ABC et AB'C'.

9 ABC est un triangle. I est le milieu de [AB]. La droite Δ passant par I et parallèle à (BC) coupe [AC] en J.
1- Montrer que J est le milieu de [AC].
2- Le quart de tour direct de centre A transforme les points B, C, I et J respectivement en B', C', I' et J'. Construire ces points.
3- Montrer que I' est le milieu de [AB'] et que J' est le milieu de [AC'].

10 1- Tracer un cercle (C) de centre O et de rayon 4cm et placer un point A tel que OA > 4cm.
2- Construire (C') l'image de (C) par le quart de tour indirect de centre A.
3- La droite (OA) coupe (C) en I et J .
a) Expliquer, sans faire de construction, comment on retrouve les images I' et J' des points I et J par le même quart de tour.
b) Placer les points I' et J' sur la figure.

11 Tracer un cercle (C) de centre O et de rayon 6cm et placer un point A de (C).
1- Construire (C') l'image de (C) par le quart de tour direct de centre A .
2- (C) et (C') se recoupent en I. Construire K l'image de I par le quart de tour direct de centre A.
3- Construire L l'image de I par le quart de tour indirect de centre A.
4- Montrer que A, L et K sont alignés.
5- Quelle est la nature du triangle ILK ?

12 Dans la figure ci-dessous ABCD, BRQP, AEFH, DIJK et CLMN sont des carrés isométriques et O est le milieu de [AC].



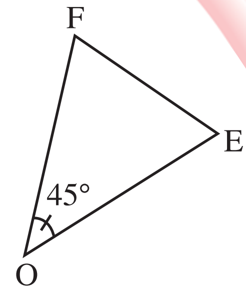
1- Montrer que les points F, A, O, C et M sont alignés.
2- Montrer que les points J , D, O, B et Q sont alignés.
3- Nommer tous les axes et les centres de symétries de la figure.
4- Trouver l'image de cette figure par le quart de tour direct de centre O.
5- Trouver l'image de cette figure par le demi tour indirect de centre O.

13 Reproduire la figure ci-contre. Donner les étapes de construction.

14 1- Reproduire la figure ci-contre en prenant 3cm pour rayon du cercle (C), donner les étapes de construction.

2- Calculer l'aire de la partie colorée en bleu.

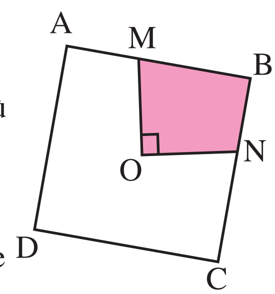
15 OEF est un triangle isocèle de sommet principal O et EF = 2cm.



1- Construire G et H les images respectives de E et F par le quart de tour direct de centre O.
2- Construire K et L les images respectives de E et F par le demi tour de centre O.
3- Construire M et N les images respectives de E et F par le quart de tour indirect de centre O.
4- Montrer que EFGHKLMN est un octogone régulier. Calculer son aire.

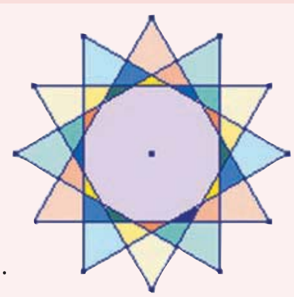
16 ABCD est un carré. I et J désignent les milieux respectifs de [BC] et [DC]. Montrer que les droites (AI) et (BJ) sont perpendiculaires.

17 On considère la figure ci- contre où ABCD est un carré de côté a et de centre O. Déterminer en fonction de a l'aire du quadrilatère OMBN.



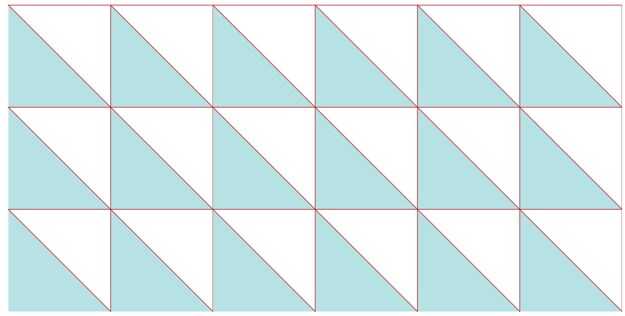
Avec l'ordinateur

A l'aide d'un logiciel:
On se propose de construire le dessin ci-contre.
- Tracer un triangle équilatéral de centre O.
- Construire l'image de ce triangle par le quart de tour direct de centre O.
Quelle est la nature du triangle obtenu ? Expliquer.
- Observer le dessin ci-contre, continuer la construction puis colorier la figure obtenue.

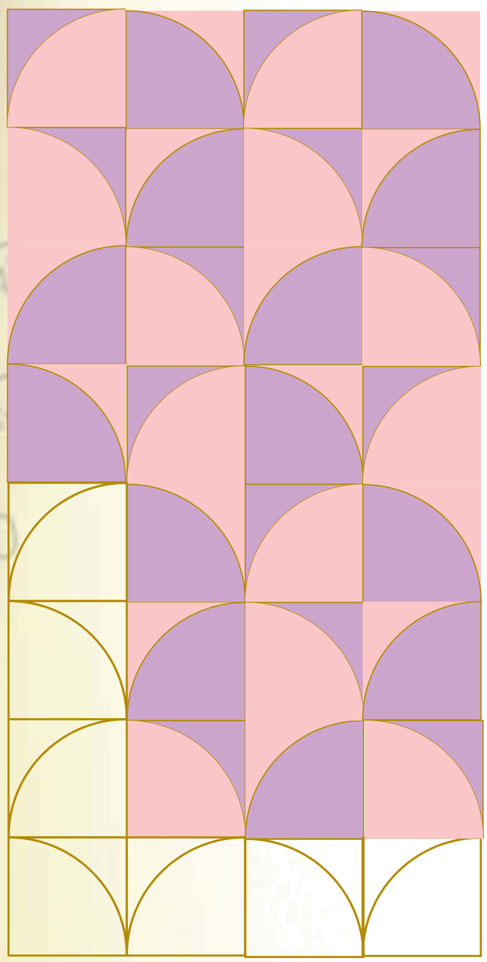


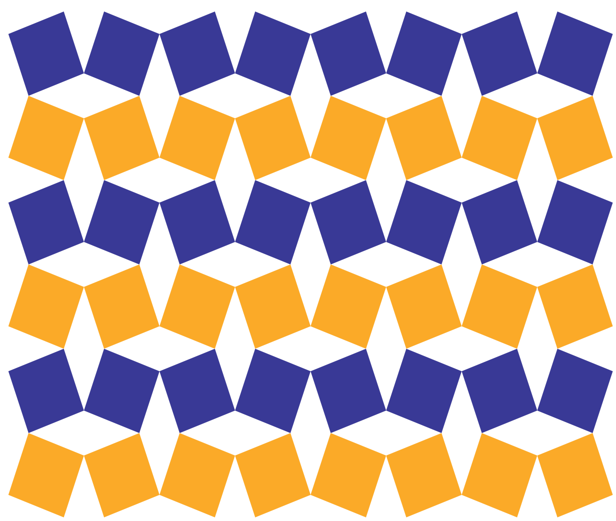
Math - Culture

Le décor musulman a son cachet propre qui le distingue des traditions antérieures du décor.



Les réalisations artistiques musulmanes sont caractérisées par le remplissage intégral de l’espace selon une structure mathématique. En effet, l’espace est occupé par des motifs de base, souvent géométriques, qui se répètent par symétrie, translation ou rotation.



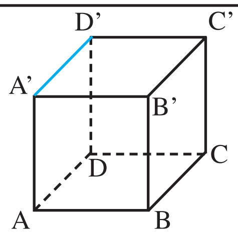
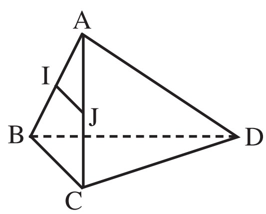
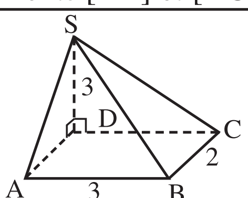
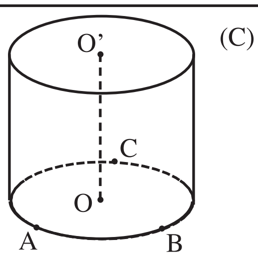


Les formes géométriques symbolisent dans leurs combinatoires la quête mystique et l’élévation de l’âme.

Chapitre 8 SECTIONS PLANES D'UN SOLIDE

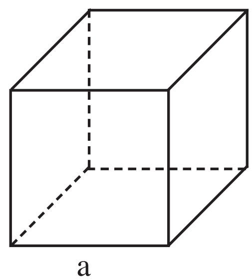
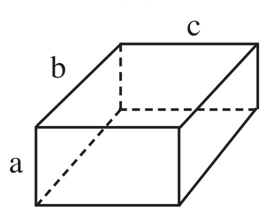
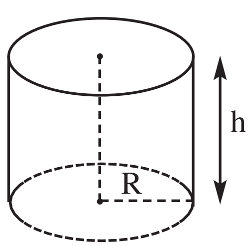
Reprendre

Pour chaque énoncé, on propose trois réponses A, B et C. Une ou plusieurs sont correctes. Lesquelles ?

Énoncés \ Réponses	A	B	C
 ABCDA'B'C'D' est un cube d'arête 3 cm.	La droite (CC') est parallèle au plan (DBB').	Le volume de ce cube est $V = 9\ cm^3$.	Les droites (CC') et (AB) sont parallèles.
 ABCD est un tétraèdre. I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].	La droite (IJ) coupe le plan (BCD).	La droite (IJ) est parallèle au plan (BCD).	Les droites (IJ) et (CD) sont parallèles.
 SABCD est une pyramide. ABCD est un parallélogramme.	$SA > SC$	La droite (AD) est parallèle au plan (SBC).	La droite (SD) est perpendiculaire au plan (ABC).
 (C) est un cylindre de hauteur 6cm et sa base a pour rayon 3cm.	Le volume du cylindre est égal à $54\pi\ cm^3$.	La droite (OO') est perpendiculaire au plan (ABC).	$OC = OA$.

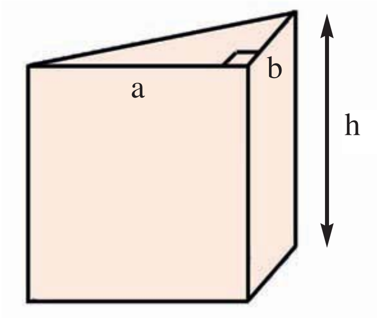
Solides usuels

Activité 1 Recopier et compléter

<table>
<tr><th>Solide</th><th>Nombre de faces</th><th>Nombre de sommets</th><th>Volume</th><th>Aire</th></tr>
<tr><td>Cube.
</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Parallélépipède droit.
</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Cylindre.
</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Activité 2 **Prisme droit**

Le solide ci-dessous est un prisme droit de base un triangle rectangle.
Calculer son volume sachant que a = 3,2cm,
b = 1,8cm et h = 4cm.

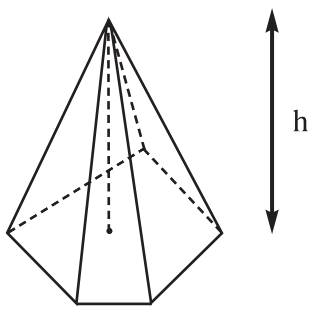


Un prisme droit est un solide dont les faces latérales sont des rectangles et les bases sont des polygones superposables.

Le volume V d'un prisme droit est V = B h, où B désigne l'aire de sa base et h sa hauteur.

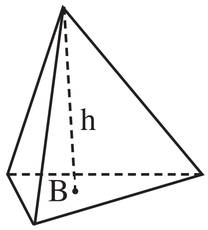
Activité 3 **Pyramide**

1-Le solide ci-dessous est une pyramide. Calculer son volume sachant que l'aire de la base est égale à $13cm^2$ et sa hauteur est égale à 6,5cm.



Le volume V d'une pyramide est $V = \frac{1}{3}$ B h, où B est l'aire de sa base et h est sa hauteur.

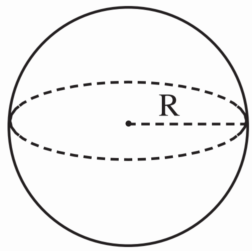
2- Le solide ci-dessous est un tétraèdre de volume égal à $24cm^3$ et de hauteur égale à 5,5cm. Quelle est l'aire de sa base ?



Le volume V d'un tétraèdre est $V = \frac{1}{3}$ B h, où B est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante à cette base.

Activité 4 Une sphère a un diamètre de 50cm.
Déterminer son aire et son volume.

La sphère de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace dont la distance à O est égale à R.
Une sphère de rayon R a une aire égale à $4\pi R^2$.



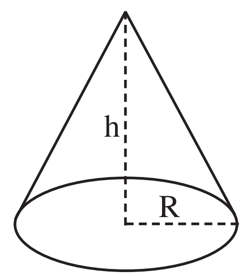
La boule de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace dont la distance à O est inférieure ou égale à R.
Une boule de rayon R a un volume égal à $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Activité 5 **Cône de révolution**

Le solide ci-contre est un cône de révolution de volume $72 cm^3$ et dont l'aire de la base est égale à $4\pi\ cm^2$.

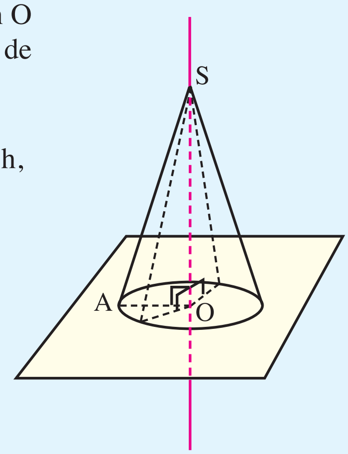
1- Calculer sa hauteur.

2- Calculer la longueur d'une génératrice.

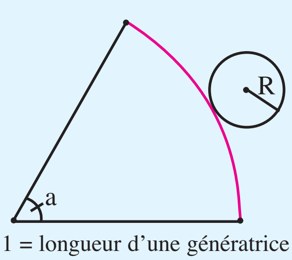


En faisant tourner un triangle SAO rectangle en O autour de la droite (SO), on obtient un cône de révolution.
On dit que [SA] est une génératrice du cône.
Le volume d'un cône de révolution est $V = \frac{1}{3}Bh$,

où B est l'aire de sa base et h sa hauteur.



Dans le développement d'un cône de révolution, le périmètre de la base du cône est égal à la longueur de l'arc de rayon une génératrice du cône.
La mesure de l'angle a en degré est $a = \frac{360\ R}{l}$.



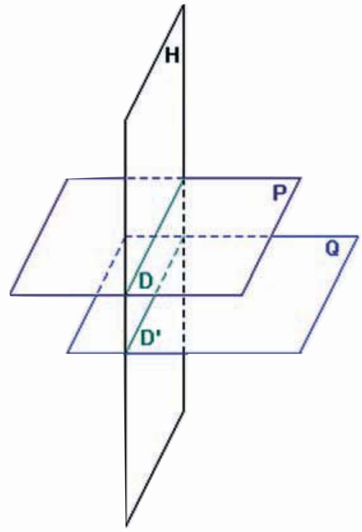
l = longueur d'une génératrice

Section d'un solide

Activité 6

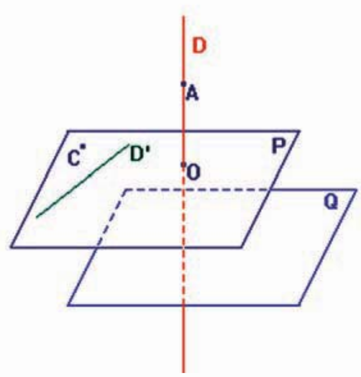
Intersection d'un plan par deux plans parallèles

Dans la figure ci-contre, les plans P et Q sont parallèles,
les plans H et P se coupent suivant la droite D et les plans H et Q se coupent suivant la droite D'.
Justifier chacun des énoncés suivants
- Les plans H et Q sont sécants.
- Les droites D et D' sont parallèles.
- La droite D est parallèle au plan Q.
- La droite D' est parallèle au plan P.



Activité 7

Dans la figure ci-contre
P et Q sont deux plans parallèles,
D est une droite perpendiculaire au plan P.
O est le point d'intersection de la droite D et du plan P.
La droite D' est incluse dans le plan P et le point C appartient au plan P. Justifier chacun des énoncés suivants
- Les droites D et D' sont orthogonales.
- Le triangle AOC est rectangle en O.
- La droite D est perpendiculaire au plan Q.

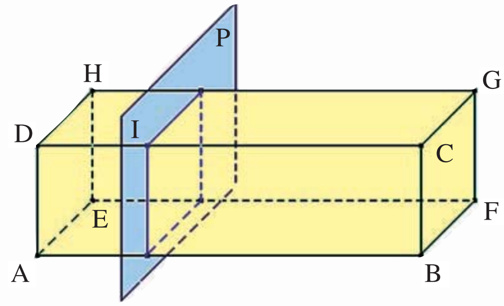


Activité 8

Section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face

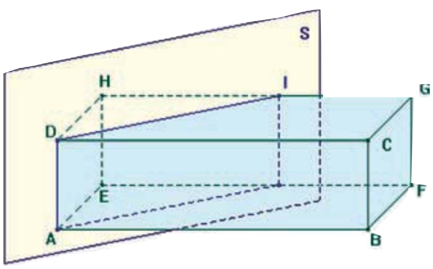
ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.
Par un point I de l'arête [DC] on mène le plan P parallèle à la face (ADE).

1- a) Reproduire la figure et colorer la section du parallélépipède par le plan P.
b) Quelle est la nature de la section obtenue? Justifier.



Activité 9 Section d'un parallélépipède rectangle par un plan contenant une arête

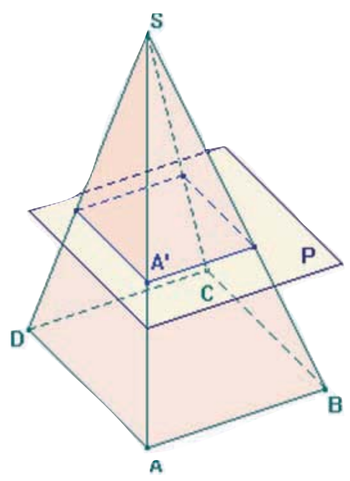
Une caisse de forme un parallélépipède rectangle ABCDEFGH est coupée suivant le plan (DIA).



1- Dessiner la section de ABCDEFGH par le plan (DIA).
Quelle est la nature de la section obtenue ? Justifier.
2- Dessiner chacun des solides obtenus et calculer leurs volumes sachant que
AB = 1m, AD = 50cm,
BF = 45cm et GI = 25cm.

Activité 10 Section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base

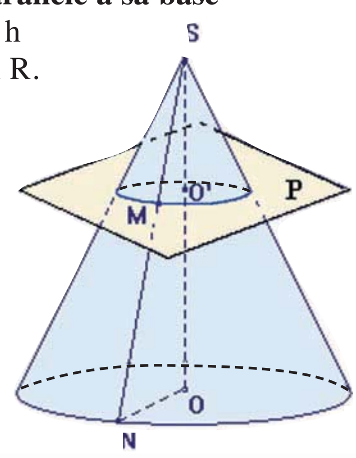
SABCD est une pyramide de hauteur 38cm et dont la base est un carré de côté 25cm.
Observer la section ci-contre où la pyramide SABCD est coupée par un plan parallèlement à sa base à une distance égale à 8cm de S.



1- Expliquer pourquoi le plan P coupe [SB] en un point B'.
2- Donner la valeur du rapport $\frac{SA'}{SA}$.
3- Quelle est la nature de la section obtenue ? Justifier.
4- Quelle est la proportion de l'aire de la section obtenue par rapport à celle de la base ABCD ?
5- Reproduire les deux solides obtenus. Calculer leurs volumes respectifs.

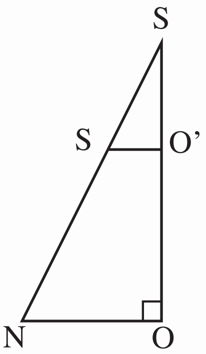
Activité 11 Section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base

Un cône de révolution de sommet S et de hauteur h a pour base un cercle (C) de centre O et de rayon R.
On sectionne ce cône par un plan P parallèlement à sa base à une distance d de S.



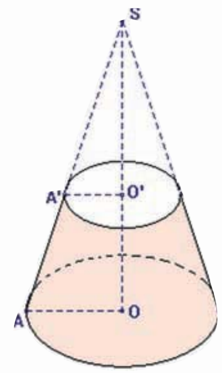
1- Justifier que la droite (SO) est perpendiculaire au plan P en un point O'.
Soit M un point de la section obtenue.
La droite (MS) coupe le cercle (C) en un point N.

On considère alors le triangle SNO comme l'indique la figure ci-contre.
2- Justifier que les droites (O'M) et (ON) sont parallèles.
3- Exprimer O'M en fonction de R, d et h.
4- En déduire la nature de la section du cône par le plan P.



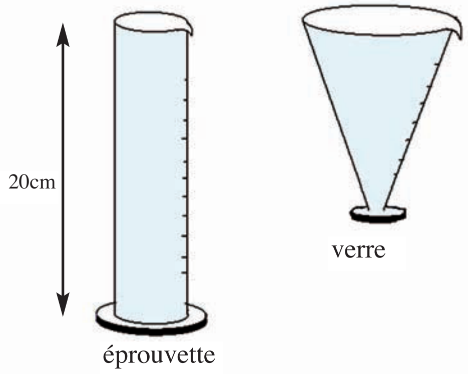
Activité 12

Un abat-jour recouvert de tissu a la forme d'un cône de révolution tronqué comme l'indique la figure ci-contre.
On donne O'A' = 15cm ; OA = 20cm et AA' = 25cm.
1- Calculer SA.
2- a) Tracer un développement du cône.
b) Calculer l'aire du tissu nécessaire à la confection de cet abat-jour.



Activité 13

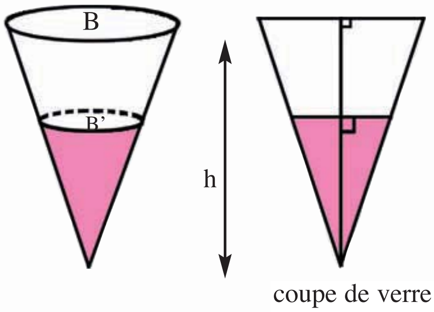
L'intérieur d'un verre de laboratoire a la forme d'un cône de révolution. L'intérieur d'une éprouvette a la forme d'un cylindre de révolution de hauteur 20cm. Ils ont chacun une contenance de 1 litre. On remplit le verre au $\frac{3}{5}$ de la hauteur du cône.



On désigne par B l'aire de la base du grand cône et par B' celle du petit. La figure ci-contre illustre la situation.
1- a) Montrer que $B' = \left(\frac{3}{5}\right)^2 B$.

b) On désigne par V' le volume du liquide dans le verre. Montrer que

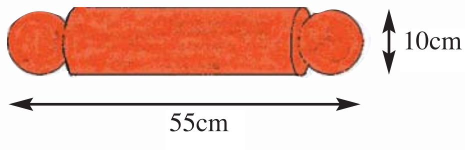
$$V' = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times 1000 cm^3.$$



2- On verse le liquide du verre dans l'éprouvette.
Calculer la hauteur du liquide dans l'éprouvette.

Activité 14

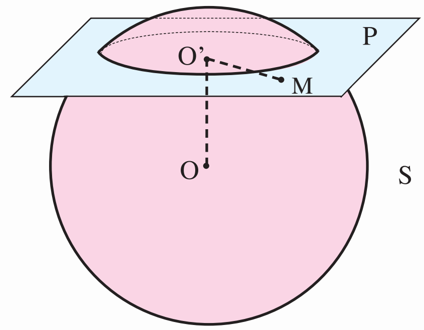
Un rouleau de pâtisserie est constitué d'un cylindre et deux boules en bois. Calculer sa masse sachant que la masse volumique du bois utilisé est $0{,}5 g/cm^3$.



Activité 15

Section d'une sphère par un plan

Une sphère S de centre O et de rayon R est sectionnée par un plan P à une distance d de O.
On désigne par (C) la section obtenue et par O' le point du plan P tel que la droite (OO') est perpendiculaire au plan P.
Soit M un point de (C).

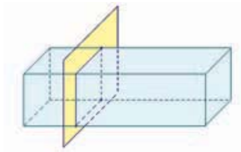


1- Quelle est la nature du triangle OO'M ? Justifier.
2- Exprimer O'M en fonction de R et d.
3- En déduire la nature de la section obtenue.
4- Application :
Une sphère de rayon 25cm est sectionnée par un plan P. La section obtenue est un cercle de centre O' et de rayon r.
Calculer r sachant que OO'=20cm.

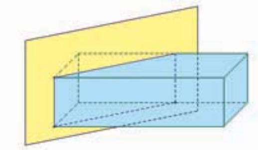
Retenir

Section d'un parallélépipède droit

◊ La section d'un parallélépipède droit par un plan parallèle à une face est un rectangle isométrique à cette face.

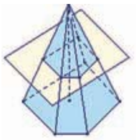


◊ La section d'un parallélépipède droit par un plan contenant une arête est un rectangle.



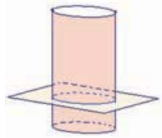
Section d'une pyramide

La section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est un polygone de même nature que cette base.



Section d'un cylindre

La section d'un cylindre par un plan parallèle à une base est un cercle de même rayon que sa base.

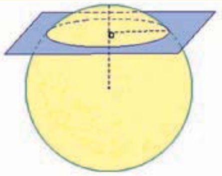


Section d'un cône

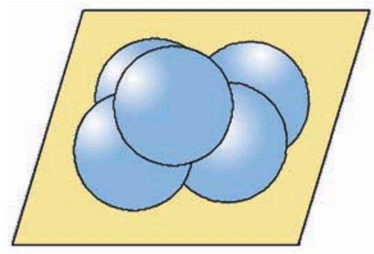
La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base est un cercle.

Section d'une sphère

La section d'une sphère par un plan est un cercle.
Si le plan passe par le centre de la sphère, le cercle obtenu est appelé grand cercle de la sphère.



Sphères et plan



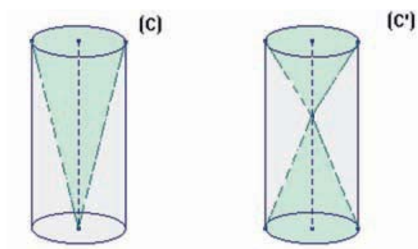
Situation

Quatre sphères de même rayon égal à 10cm, sont placées sur une table horizontale de sorte que leurs centres forment un carré de côté 20cm.
Une cinquième sphère de même rayon qui les effleure est placée au-dessus d'elles. Calculer la distance du centre de la cinquième sphère au plan de la table.

Stratégie de résolution

Les centres des cinq sphères forment une pyramide.
Déterminer la hauteur de cette pyramide.
Conclure.

Cylindre et cône



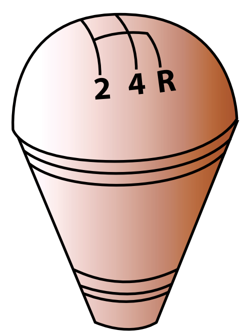
Situation

Dans la figure ci-contre les cylindres (C) et (C') ont mêmes dimensions. On désigne par A et B les solides colorés en vert dans chaque cylindre.
A et B ont-ils le même volume?

Stratégie de résolution

Utiliser l'expression du volume d'un cône de révolution.

Sphère et cône

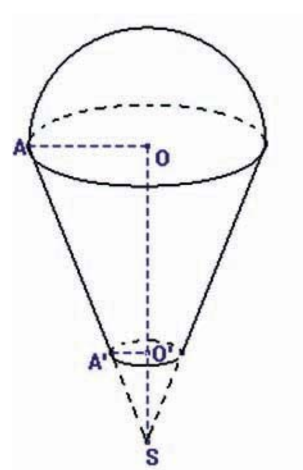


Situation

Le pommeau de levier de vitesse d'une voiture a la forme d'un cône de révolution dont on a sectionné l'extrémité, surmonté d'une demi-boule.
On sait que le rayon de la demi-boule est égal à 2,5cm.
On sait aussi que son centre est à une distance de 7cm du plan de la section du cône.
De plus, le rayon de la section est égal à 1,5cm.
Donner une valeur approchée à 10^{-1} près du volume du pommeau.

Stratégie de résolution

On modélise la situation par la figure ci-contre.
Retrouver les distances OO', OA et O'A'.
Calculer les distances SO et SO'.
Conclure.



S'auto-évaluer

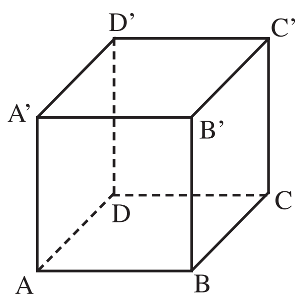
Vrai ou faux

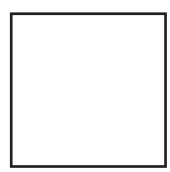
Répondre par vrai ou faux

1– Si on multiplie les dimensions d'un parallélépipède rectangle par 2 alors l'aire de chaque face est multipliée par 4.
2–Pour doubler le volume d'un cube il suffit de multiplier la longueur de son arête par 2.
3–Dans un cube d'arête b, la longueur d'une diagonale est égale à $b\sqrt{3}$.

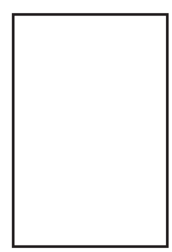
Observer

1- Un des dessins suivants représente la section du cube ABCDA'B'C'D' par un plan parallèle à une face. Lequel ?





dessin 1



dessin 2

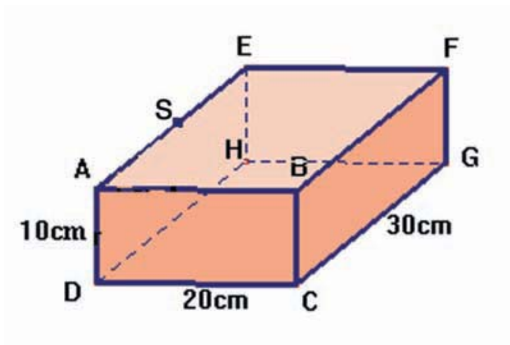
2- La section d'une pyramide par un plan parallèlement à sa base donne un hexagone. Quel est le nombre de faces de cette pyramide ?

Recopier et compléter

On considère trois cylindres (C_1), (C_2) et (C_3) de même hauteur tels que les rayons respectifs de leurs bases sont 10cm, 20cm et 30cm. On désigne par V_1, V_2 et V_3 leurs volumes respectifs.
Compléter : $V_1 = \ldots V_2$; $V_1 = ..V_3$

Appliquer

1 La figure suivante représente un morceau de bois en forme d'un parallélépipède rectangle.



Le menuisier a marqué un point S de l'arête [AE] tel que AS = 10cm. Il a ensuite coupé suivant le plan (SFG).
1- Représenter les deux solides obtenus.
2- Calculer leurs volumes.

2 Lorsqu'on multiplie par 4 l'arête d'un cube, son volume augmente de $6540{,}849\text{cm}^3$.
Calculer le volume initial du cube.

3 La hauteur d' un cône de révolution vaut 1,30 m et l'aire de sa base est égale à $2{,}50\text{m}^2$.
On sectionne le cône par un plan parallèle à sa base à une distance de 0,9m du sommet.
Déterminer l'aire de la section obtenue.

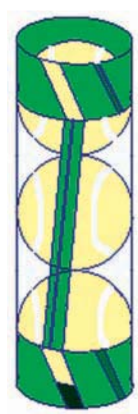
4 La hauteur d'un cône de révolution est 0,6m et le rayon de sa base est 0,4m.
A quelle distance du sommet faut-il sectionner le cône pour obtenir un cône dont l'aire latérale est le quart de l'aire latérale du cône initial ?

5 La pyramide de Chéops (en Egypte) est régulière.
Elle a pour hauteur 138m et une base carrée de 230m de côté.
a) Quel est son volume ?
b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire d'une face.

6 Soit S une sphère de rayon 15cm.
On sectionne cette sphère par un plan à une distance de 7cm de son centre.
Calculer le rayon de la section obtenue ainsi que son aire.

Maîtriser

7 Trois balles de tennis sont empilées dans une boite cylindrique.
Elles effleurent les parois du cylindre.
Déterminer la proportion du volume de l'espace vide dans le cylindre par rapport au volume du cylindre.



8 Un verre a la forme d'un cône de révolution. Il est rempli jusqu'au quatre cinquièmes de sa hauteur.
Peut-on dire qu'il est à moitié plein ?
Justifier.

9 L'eau de pluie est recueillie dans un grand récipient cylindrique puis versée dans une éprouvette cylindrique dont le rayon est 8 fois plus petit.

1- Lorsqu'il est tombé 1mm de pluie dans le récipient quelle est la hauteur de l'eau dans l'éprouvette ?

2- Expliquer comment graduer l'éprouvette de manière à pouvoir lire directement la hauteur d'eau tombée dans le récipient en mm.

10 Dans la figure ci-dessous, un obus est composé d'une demi-boule de rayon 4cm, d'un cône de révolution de hauteur 8cm et d'un cylindre de hauteur x cm.

1- Exprimer le volume V de l'obus en fonction de x.

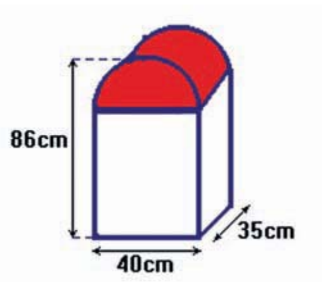
2- a) V est-il fonction linéaire de x ?

   b) V est-il fonction affine de x ?

3- Dans un repère (O, I, J) tracer la représentation graphique de V en fonction de x.

4- Lire graphiquement, donner un arrondi au centimètre cube de V lorsque x = 2cm, puis lorsque x = 5cm.

11 Une borne kilométrique a la forme d'un parallélépipède rectangle peint en blanc, surmonté d'un demi cylindre peint en rouge. La borne a 40cm de largeur, 35cm d'épaisseur et 86cm de hauteur.
On se propose de peindre 100 bornes.

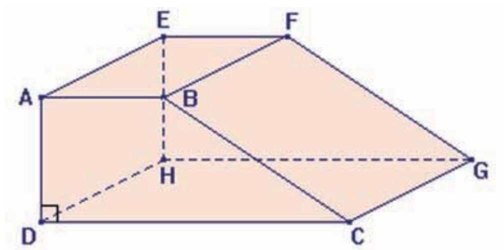


1- Quelle est l'aire totale à peindre en blanc ?

2- Quelle est l'aire totale à peindre en rouge ?

3- Sachant qu'une boite de peinture permet de peindre 2,5m^2, quelle est le nombre minimal de boites de peinture rouge et de boites de peinture blanche à commander ?

12 On considère le solide ci-dessous dont les faces sont 4 rectangles et 2 trapèzes.

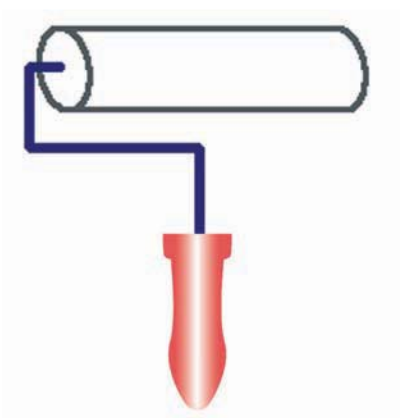


1- Par quel plan peut-on sectionner ce solide pour obtenir un prisme droit à base triangulaire et un parallélépipède rectangle ?

2- Par quel plan peut-on sectionner ce solide pour obtenir un prisme droit à base triangulaire et un prisme droit à base un parallélogramme non rectangle ?

3- Par quel plan peut-on sectionner ce solide pour obtenir deux prismes droits à base triangulaire?

13 Un rouleau de peinture a la forme d'un cylindre de rayon 4cm et de hauteur 25cm.



1- Lorsque le rouleau a fait exactement un tour, quelle aire a-t-on peint ?
2- On veut peindre un plafond rectangulaire de 3m sur 4.2m. Combien de tours, au minimum, devrait faire le rouleau pour peindre entièrement le plafond ?

14 Dans une boite cylindrique de rayon 27cm et de hauteur 10cm, on range sept boites cylindriques de rayon 9cm et de hauteur 10cm.
1- Faire une figure.
2- Dans chacune des boites de 9cm de rayon on range des boites cylindriques de rayon 3cm et de hauteur 10cm. Enfin on range dans chacune des boites de 3cm de rayon des boites cylindriques de rayon 1cm et de hauteur 10cm.
Combien a-t-on de boites au total ?