> Il faut se mettre à l'eau pour apprendre à nager, pour savoir résoudre des problèmes, il faut en résoudre.
>
> Georges Polya

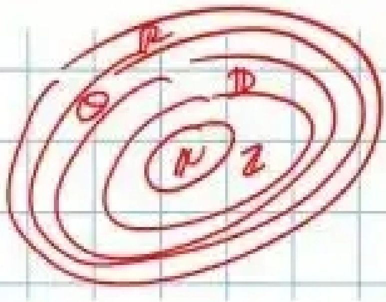
Les ensembles de nombres

Activité 1

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{D}$ désigne l'ensemble des décimaux.
$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

Recopier et compléter le tableau ci-contre.
(La croix indique que le nombre appartient à l'ensemble)

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
2,5	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
12	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$-\frac{2}{3}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\sqrt{5}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$-9 = -\frac{63}{7}$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
π	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$\frac{5}{8}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\frac{\sqrt{3}}{7}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$



$\frac{a}{2^n}$; $\frac{a}{5^n}$; $\frac{a}{2^n \times 5^m}$; $\frac{a}{10^n}$; $\in \mathbb{D}$

Activité 2

Répondre par vrai ou faux.

a) $\sqrt{3} \in \mathbb{D}$ (F) ; $\frac{5}{8} \in \mathbb{D}$ (V) ; $-23 \in \mathbb{Q}$ (V) ; $-23 \in \mathbb{Z}$ (V) ; $\sqrt{36} \notin \mathbb{N}$ (F) ; $6,13 \notin \mathbb{D}$ (F) ; $1,98 \in \mathbb{Q}$ (V) ; $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$ (F)

$\frac{3}{11} \in \mathbb{Q}$ F (V) ; $\frac{27}{3} \notin \mathbb{N}$ (F) ; $\frac{2}{9} \in \mathbb{D}$ (F)

b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{D}$ (V) ; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (V) ; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{D}$ (F) ; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ V

Activité 3

1) Calculer $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, en déduire sans calcul la valeur de $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$.

2) Trouver quatre entiers naturels a, b, c et d distincts tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$.

3) Trouver cinq entiers naturels a, b, c, d et e distincts tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1$.

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right]}$

$=\frac{1}{2}\times 1$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

2) Trouver quatre entiers naturels a, b, c et d distincts tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$.

$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a=2 \\ b=4 \\ c=6 \\ d=12 \end{cases}$

3) Trouver cinq entiers naturels a, b, c, d et e distincts tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1$.

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{2}$

$\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1}$

(Par *Numérix, collection Eureka, Dunod*)

Activité 7

Cocher la case convenable.

$\frac{2002}{2002}+\frac{1}{2002}$

Le produit $\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\ldots\times\left(1+\frac{1}{2002}\right)\times\left(1+\frac{1}{2003}\right)$ vaut

☐ 2004 ☐ 2003 ☐ 2002 ☒ 1002 ☐ 1001.

(Concours Kangourou 2003)

$=\left(\frac{\cancel{3}}{2}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\frac{5}{\cancel{4}}\cdots\cdots\times\frac{\cancel{2003}}{2002}\times\frac{2004}{\cancel{2003}}=\frac{2004}{2}=1002\right.$

Les identités remarquables

Activité 11

a) Calculer

$(3-\sqrt{5})^2$; $(2+a\sqrt{3})^2$; $(3\sqrt{2}-5\sqrt{6})^2$; $(2+a)^3$; $(1-\sqrt{5})^3$

b) Ecrire sous la forme $a+b\sqrt{c}$, où a, b et c sont des entiers.

$\sqrt{14-6\sqrt{5}}$; $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; $\sqrt{28+10\sqrt{3}}$; $\sqrt{21-8\sqrt{5}}$

$\left(3-\sqrt{5}\right)^2 = 9 - 6\sqrt{5} + 5 = 14 - 6\sqrt{5}$

$\left(2+a\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 4a\sqrt{3} + 3a^2.$

$\left(3\sqrt{2}-5\sqrt{6}\right)^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - \underbrace{2.3.\sqrt{2}.5.\sqrt{6}}_{30\sqrt{12} = 30\times 2\sqrt{3}} + \left(5\sqrt{6}\right)^2$

$= 18 - 60\sqrt{3} + 150$

$= 168 - 60\sqrt{3}$

$\left(\sqrt{5}\right)^3$

$(2 + a)^3$; $(1-\sqrt{5})^3$

$\left(2+a\right)^3 = 8 + 12.a + 6a^2 + a^3$

$\left(1-\sqrt{5}\right)^3 = 1 - 3\sqrt{5} + 15 - 25\sqrt{5}$

$= 16 - 28\sqrt{5}$

Rappel

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

* $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

b) Ecrire sous la forme $a + b\sqrt{c}$, où a, b et c sont des entiers.

$\sqrt{14-6\sqrt{5}}$; $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; $\sqrt{28+10\sqrt{3}}$; $\sqrt{21-8\sqrt{5}}$

$a^2 - 2ab + b^2$

* $14 - 6\sqrt{5} = 14 - 2.\underbrace{3}_{a}.\underbrace{\sqrt{5}}_{b}$

=

* $\left(3-\sqrt{5}\right)^2 = 9 - 6\sqrt{5} + 5$

$\left(3-\sqrt{5}\right)^2 = 14 - 6\sqrt{5}$

$*\quad \sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = |3-\sqrt{5}| = 3-\sqrt{5}$

$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = |1+\sqrt{2}| = 1+\sqrt{2}$

on a $\quad 3+2\sqrt{2} = \underbrace{3}_{a^2+b^2} + \underbrace{2.1.\sqrt{2}}_{2ab} = (a+b)^2$

$= (1+\sqrt{2})^2$

$= 1^2+2\sqrt{2}+2 = 3+2\sqrt{2}$

$\sqrt{28+10\sqrt{3}} = \sqrt{(5+\sqrt{3})^2} = |5+\sqrt{3}| = 5+\sqrt{3}$

$28+10\sqrt{3} = 28 + 2.5.\sqrt{3} = (5+\sqrt{3})^2$

$= a^2+b^2 + 2ab = (a+b)^2$

vérification : $(5+\sqrt{3})^2 = 25 + 10\sqrt{3} + 3 = 28+10\sqrt{3}$

$\sqrt{21 - 8\sqrt{5}} = \sqrt{(4-\sqrt{5})^2} = |4-\sqrt{5}| = 4-\sqrt{5}$

$21 - 8\sqrt{5}$

$21 - 2.4\sqrt{5} = (4-\sqrt{5})^2$

$a^2+b^2 - 2ab = (a-b)^2$