

CORRECTION : EPREUVE MATHÉMATIQUES / Session de JUIN 2019 / BAC MATHS

Exercice N°1 :

1°) a) $(AB) \perp (AC)$, ζ' de diamètre $[CM]$ et $H \in \zeta'$ donc $(HC) \perp (MH)$ or $H \in (HC)$

donc $(AC) \perp (MH)$ ainsi $(AB) \parallel (MH)$

b) $AMA'B$ est un losange donc $(AB) \parallel (A'M)$ et $(AB) \parallel (MH)$ d'où $(A'M) \parallel (MH)$ ce qui prouve que H, M et A' sont alignés

c) • dans le triangle ABC on a $(AB) \parallel (MH)$, $H \in [AC]$ et $M \in [BC]$ donc d'après le théorème

de Thalès : $\frac{CM}{CB} = \frac{HM}{AB} = \frac{CH}{AC}$ et on a $\frac{CM}{CB} = \frac{1}{3}$ donc $\frac{HM}{AB} = \frac{1}{3}$ par suite $HM = \frac{1}{3}AB$

• Le triangle AMH est rectangle en H donc d'après le théorème du Pythagore :

$$\text{Et puisque } AB = AM \text{ on aura } AB^2 = AH^2 + HM^2 \Rightarrow AH^2 = AB^2 - HM^2$$

2°) a) • Angle de S : $\left(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HM} \right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

• Rapport de S : $k = \frac{HM}{HA}$. On a : $HM = \frac{1}{3}AB$ et $AH^2 = AB^2 - HM^2$

$$\text{Donc } AH^2 = AB^2 - \frac{1}{9}AB^2 = \frac{8}{9}AB^2 \Rightarrow \frac{AB^2}{AH^2} = \frac{9}{8} \Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{il en résulte : } k = \frac{HM}{HA} = \frac{AB}{3HA} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

b) • Angle de S est $\left(-\frac{\pi}{2} \right)$ d'où $S((AI)) \perp (AI)$ et $S(A) = M \in S((AI))$ d'où $S((AI)) = (BC)$

• De même $S((MH)) \perp (MH)$ et $S(H) = H \in S((MH))$ d'où $S((MH)) = (AC)$

• $A' \in (MH) \cap (AI)$ d'où $S(A') \in S((MH)) \cap S((AI)) \Rightarrow S(A') \in (AC) \cap (BC) \Rightarrow S(A') = C$

3°) • une similitude conserve les milieux

• I est le milieu de $[AA']$ donc $S(I)$ est le milieu de $S([AA']) = [CM]$ d'où $S(I) = I'$

• $S(I) = I' \Rightarrow \left(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HI'} \right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$, $H \in \zeta'$ de rayon $[IH]$ donc (HI) est tangente à ζ' en H

4°) a) $S_{(AH)}$: antidéplacement $\Rightarrow S_{(AH)}$ est une similitude indirecte de rapport 1

• S' est la composée de trois similitudes dont deux indirectes de rapport 1 et une directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ce qui prouve que S' est une similitude directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{4}$

• $S'(H) = S_{(AH)} \circ S \circ S_{(AH)}(H) = S_{(AH)} \circ S(H) = S_{(AH)}(H) = H \Rightarrow H$ est le centre de S'

b) • $\left(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'A} \right) \equiv \left(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'M} \right) [2\pi]$ ($[A'A]$ bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'M} \right)$)

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} \left(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'A} \right) \equiv \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA} \right) [2\pi] \\ \left(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'M} \right) \equiv \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CN} \right) [2\pi] \end{array} \right.$$

(Deux angles qui interceptent le même arc dans le cercle)

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA} \right) \equiv \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CN} \right) [2\pi] \text{ ainsi dans le triangle } MNC, \left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CH} \right) \equiv \left(\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{CN} \right) [2\pi]$$

Donc [CH] est la bissectrice de l'angle NCM et (CH) ⊥ (MN) d'où (CH) est la médiatrice de [MN]

⇒ CM = CN ce qui prouve que MNC est isocèle en C

c) • $S'(A) = S_{(AH)} \circ S \circ S_{(AH)}(A) = S_{(AH)} \circ S(A) = S_{(AH)}(M) = N$

• $S'(A) = N \Rightarrow \text{angle de } S' : \left(\overline{HA}, \overline{HN} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Exercice N°2:

1°) a) $\overline{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{-4}{-1} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow A, B$ et C ne sont pas alignés

b) $z_A = 1 \Rightarrow A \in P, z_B = 1 \Rightarrow B \in P, z_C = 1 \Rightarrow C \in P$

et A, B et C déterminent un seul plan P donc il a pour équation $z = 1$

Ou bien : $\overline{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \overline{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ vecteur normale de P

⇒ $-4z + d = 0, A \in P \Rightarrow -4 + d = 0 \Rightarrow d = 4$ d'où $P : -4z + 4 = 0 \Rightarrow P : z = 1$

2°) a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 1 = x^2 + y^2 + (z - 2)^2 - 4 - 1 = x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 5 = \sqrt{5}^2$

⇒ S est une sphère de rayon $R = \sqrt{5}$ et de centre $\Omega(0, 0, 2)$

b) $d(\Omega, P) = \frac{|z_\Omega - 1|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{1} = 1 < \sqrt{5} \Rightarrow S$ et P sont sécants suivant le cercle ζ de rayon

$\sqrt{\sqrt{5}^2 - 1} = 2$

Comme $\overline{\Omega I} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{n} \Rightarrow (\Omega I) \perp P$ et $I \in P$ donc I est le projeté orthogonale de Ω sur P

Ce qui prouve que I est le centre de ζ

3°) a) $d(\Omega_\lambda, P) = \frac{|z_{\Omega_\lambda} - 1|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|\lambda - 1|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = |\lambda - 1|$

On sait que pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ on a : $(\lambda - 1)^2 < (\lambda - 1)^2 + 4$ d'où $\sqrt{(\lambda - 1)^2} < \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 4}$

C'est-à-dire $|\lambda - 1| < \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 4} \Rightarrow |\lambda - 1| < R_\lambda \Rightarrow S_\lambda$ et P sont sécants suivant un cercle ϕ

• de rayon $r = \sqrt{R_\lambda^2 - |\lambda - 1|^2} = \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 4 - (\lambda - 1)^2} = \sqrt{4} = 2$

• de centre le projeté orthogonale de Ω_λ sur P ; $\overline{\Omega_\lambda I} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)\vec{n} \Rightarrow (\Omega_\lambda I) \perp P$ et $I \in P$

⇒ I est le centre de ϕ . Finalement $\phi = \zeta$ et par suite $S_\lambda \cap P = \zeta$

b) $D \in S_{\lambda_0} \Rightarrow \Omega_{\lambda_0} D = R_{\lambda_0} \Rightarrow \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-1 - \lambda_0)^2} = \sqrt{(\lambda_0 - 1)^2 + 4}$

⇒ $\lambda_0^2 + 2\lambda_0 + 17 = \lambda_0^2 - 2\lambda_0 + 5 \Rightarrow 4\lambda_0 = -12 \Rightarrow \lambda_0 = -3$

c) S_{λ_0} à pour centre $\Omega_{\lambda_0}(0, 0, -3)$ et de rayon $R_{\lambda_0} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Soit h l'homothétie de centre M et de rapport k qui envoie S en S_{λ_0}

On a : $h(S) = S_{\lambda_0}$ donne $\overline{M\Omega_{\lambda_0}} = k \overline{M\Omega}$ et $R_{\lambda_0} = |k|R$

$$2\sqrt{5} = |k|\sqrt{5} \Rightarrow |k| = 2 \text{ donc } k = 2 \text{ ou } k = -2$$

• Pour $k = 2$ on a : $\overline{M\Omega_{\lambda_0}} = k \overline{M\Omega} \Rightarrow \begin{cases} -x_M = -2x_M \\ -y_M = -2y_M \\ -3 - z_M = -2(2 - z_M) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = 0 \\ -3z_M = -1 \end{cases} \Rightarrow M\left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$

• Pour $k = -2$ on a : $\overline{M\Omega_{\lambda_0}} = k \overline{M\Omega} \Rightarrow \begin{cases} -x_M = 2x_M \\ -y_M = 2y_M \\ -3 - z_M = 2(2 - z_M) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = 0 \\ z_M = 7 \end{cases} \Rightarrow M(0, 0, 7)$

Conclusion : il existe deux homothéties h_1 de centre $M\left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$ et de rapport 2, h_2 de centre

$M(0, 0, 7)$ et de rapport (-2) qui transforment S en S_{λ_0}

Exercice N°3 :

1°) a) $29 \times 2 - 13 \times 4 = 58 - 52 = 6$

b) • $29x - 13y = 29 \times 2 - 13 \times 4 \Leftrightarrow 29(x - 2) = 13(y - 4)$

$\Leftrightarrow 13$ divise $29(x - 2)$ et $29 \wedge 13 = 1$ divise 6 donc d'après lemme de Gauss

13 divise $(x - 2)$ ainsi $x - 2 = 13k ; k \in \mathbb{Z}$ par suite $x = 2 + 13k ; k \in \mathbb{Z}$

• $29(13k) = 13(y - 4) \Leftrightarrow 29k = y - 4 \Leftrightarrow y = 4 + 29k ; k \in \mathbb{Z}$

Conclusion : $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(2 + 13k, 4 + 29k) ; k \in \mathbb{Z}\}$

2°) • 29 est un nombre premier et 29 ne divise pas 2

D'où d'après le petit théorème de Fermat on a : $2^{29-1} \equiv 1[\text{mod } 29] \Rightarrow 2^{28} \equiv 1[\text{mod } 29]$

• $\begin{cases} 2^{28} \equiv 1[\text{mod } 29] \\ 2^{29} \equiv 2[\text{mod } 29] \end{cases} \Rightarrow 2^{28} \times 2^{29} \equiv 2[\text{mod } 29] \Rightarrow 2^{57} \equiv 2[\text{mod } 29] \Rightarrow -2^{57} \equiv -2[\text{mod } 29]$

$\Rightarrow (-2)^{57} \equiv -2[\text{mod } 29] \Rightarrow ((-2)^3)^{19} \equiv -2[\text{mod } 29] \Rightarrow (-8)^{19} \equiv -2[\text{mod } 29]$

• Donc -8 est solution de (E')

3°) a) • Si x_0 est un multiple de 29 alors $x_0^{19} \equiv 0[\text{mod } 29]$ donc x_0 n'est pas solution de (E')

D'où si x_0 est solution de (E') alors x_0 n'est pas multiple de 29

• $x_0^{19} \equiv 1[\text{mod } 29] \Rightarrow \begin{cases} x_0^{28} \equiv 1[\text{mod } 29] \text{ (Petit théorème de Fermat)} \\ 29 \text{ est un nombre premier} \end{cases}$

b) • x_0 est solution de (E') alors $x_0^{19} \equiv -2[\text{mod } 29] \Rightarrow (x_0^{19})^3 \equiv (-2)^3[\text{mod } 29]$

$\Rightarrow (x_0^{19})^3 \equiv (-2)^3[\text{mod } 29] \Rightarrow x_0^{57} \equiv -8[\text{mod } 29]$

• $\begin{cases} x_0^{57} \equiv -8[\text{mod } 29] \Leftrightarrow x_0 \times x_0^{56} \equiv -8[\text{mod } 29] \\ (x_0^{28})^2 \equiv 1[\text{mod } 29] \Leftrightarrow x_0^{56} \equiv 1[\text{mod } 29] \end{cases}$

$\Rightarrow x_0 \equiv -8[\text{mod } 29]$

c) x est solution de $(E') \Rightarrow x \equiv -8[\text{mod } 29] \Rightarrow x = -8 + 29k ; k \in \mathbb{Z}$

Réciproquement : $x = -8 + 29k \Rightarrow x \equiv -8[\text{mod } 29] \Rightarrow x^{19} \equiv (-8)^{19}[\text{mod } 29]$

et -8 est solution de (E') c'est-à-dire $(-8)^{19} \equiv -2[\text{mod } 29]$

Donc $x^{19} \equiv -2 \pmod{29} \Rightarrow x$ est solution de (E')

Conclusion : $S_{\mathbb{Z}} = \{-8 + 29k ; k \in \mathbb{Z}\}$

d) $(x-3)^{19} \equiv -2 \pmod{29} \Leftrightarrow x-3$ est solution de (E') $\Leftrightarrow x-3 = -8 + 29k ; k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -5 + 29k ; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow S_{\mathbb{Z}} = \{-5 + 29k ; k \in \mathbb{Z}\}$

4°) • $(x-3)^{19} \equiv -2 \pmod{29} \Leftrightarrow x-3 \equiv -8 \pmod{29}$

• On a 13 ne divise pas $x-3$ donc $(x-3)^{12} \equiv 1 \pmod{13} \Leftrightarrow x-3 \equiv -2 \pmod{13}$

D'où $\begin{cases} (x-3)^{19} \equiv -2 \pmod{29} \\ (x-3)^{13} \equiv -2 \pmod{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \equiv -8 \pmod{29} \\ x-3 \equiv -2 \pmod{13} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \equiv -8 + 29p \\ x-3 \equiv -2 + 13q \end{cases}, (p,q) \in \mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + 29p \\ x = 1 + 13q \end{cases}, (p,q) \in \mathbb{Z}^2$

$\Leftrightarrow x-x = -5 + 29p - 1 - 13q \Leftrightarrow 0 = -6 + 29p - 13q \Leftrightarrow 29p - 13q = 6 ; (p,q) \in \mathbb{Z}^2$

D'où p et q sont solutions de (E). Ainsi : $p = 2 + 13k$ et $q = 4 + 29k ; k \in \mathbb{Z}$

Par suite $x = -5 + 29(2 + 13k) = 53 + 377k ; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow S_{\mathbb{Z}} = \{53 + 377k ; k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice N°4 :

1°) a) $f'(x) = \frac{(1-e^{-x})'}{2\sqrt{1-e^{-x}}} = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{1-e^{-x}}} > 0$, f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$

et $f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{+\infty} f[) = [0, 1[\Rightarrow f$ possède une fonction réciproque g définie sur $[0, 1[$

b) $y \in [0, +\infty[, x \in [0, 1[, g(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{1-e^{-y}} = x \Leftrightarrow 1-e^{-y} = x^2$
 $\Leftrightarrow e^{-y} = 1-x^2 \Leftrightarrow -y = \ln(1-x^2) \Leftrightarrow y = -\ln(1-x^2) \Leftrightarrow g(x) = -\ln(1-x^2)$

c) $g(x) = x \Leftrightarrow g(x) - x = 0$, on pose $h(x) = g(x) - x, x \in [0, 1[$, h est continue sur $[0, 1[$
 et $h(0,7) \times h(0,8) \approx (-0,0267) \times 0,222 \approx -0,0059 < 0$

Donc $h(x) = 0$ ($g(x) = x$) admet une solution $\alpha \in [0,7; 0,8]$

d) Voir figure annexe

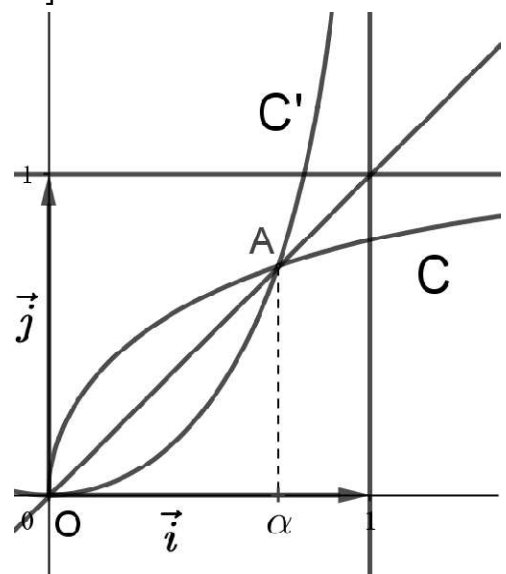
2°) a) f est continue sur $[0, +\infty[$, g est dérivable sur $[0, 1[$

et $g([0, 1[) = [0, +\infty[$ d'où φ est dérivable sur $[0, 1[$

et $\varphi'(x) = g'(x)f(g(x))$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = \frac{2x}{1-x^2} \times x = \frac{2x^2}{1-x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } a + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{1-x} &= \frac{a(1+x)(1-x) + b(1-x) + c(1+x)}{(1+x)(1-x)} \\ &= \frac{-ax^2 + x(c-b) + a+b+c}{(1+x)(1-x)} \end{aligned}$$



$$\frac{2x^2}{1-x^2} = a + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 2 \\ c - b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = b = 1 \end{cases}$$

c) $\varphi'(x) = -2 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow \varphi(x) = -2x + \ln(1+x) - \ln(1-x) + cte$

$\varphi(0) = \int_0^{g(0)} f(x) dx = \int_0^0 f(x) dx \Rightarrow cte = 0$ donc $\varphi(x) = -2x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $x \in [0,1[$

d) $\mathcal{A} = \int_0^\alpha |f(x) - g(x)| dx$ (unité d'aire)

• Par raison de symétrie

$\int_0^\alpha |f(x) - g(x)| dx = 2 \int_0^\alpha (f(x) - x) dx = 2 \left[\int_0^\alpha f(x) dx - aire(OAB) \right]$; $B(\alpha, 0)$

• $\int_0^\alpha f(x) dx \rightarrow$ l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites

d'équations $x=0$ et $x=\alpha$ et $aire(OAB) = \frac{OB \times AB}{2} = \frac{\alpha^2}{2}$

• On sait que $g(\alpha) = \alpha$ d'où $\int_0^\alpha f(x) dx = \int_0^{g(\alpha)} f(x) dx = \varphi(\alpha)$ il résulte $\mathcal{A} = 2 \left(\varphi(\alpha) - \frac{\alpha^2}{2} \right)$

3°) a) $\int_0^{\sqrt{3}} S_n(t) dt = \int_0^{\sqrt{3}} 2 \left(\sum_{k=1}^n t^{2k-1} \right) dt = \sum_{k=1}^n \left(2 \int_0^{\sqrt{3}} t^{2k-1} dt \right)$

et $2 \int_0^{\sqrt{3}} t^{2k-1} dt = 2 \left[\frac{t^{2k}}{2k} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2k}}{k} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3^2}}\right)^k}{k} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^k}{k} = \frac{1}{k \cdot 3^k} \Rightarrow \int_0^{\sqrt{3}} S_n(t) dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 3^k} = u_n$

b) $S_n(t) = 2 \sum_{k=1}^n t^{2k-1} = \frac{2}{t} \sum_{k=1}^n (t^2)^k$ et $\sum_{k=1}^n (t^2)^k = t^2 \times \frac{1-(t^2)^n}{1-t^2}$ Somme de n termes d'une suite

géométrique de premier terme t^2 de raison t^2

Par suite $S_n(t) = \frac{2}{t} \times t^2 \times \frac{1-t^{2n}}{1-t^2} = (1-t^{2n}) \frac{2t}{1-t^2} = (1-t^{2n}) g'(t)$, $n \geq 1$ et $t \in [0,1[$

c) $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 0 \leq t^{2n} \leq \frac{1}{3^n} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{3^n} \leq 1 - t^{2n} \leq 1 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) g'(t) \leq (1 - t^{2n}) g'(t) \leq g'(t)$

car $g'(x) \geq 0$

D'où pour $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ on a : $\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) g'(t) \leq S_n(t) \leq g'(t)$ (*)

d) On intégrant membre à membre l'inégalité (*) on aura :

$\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \int_0^{\sqrt{3}} g'(t) dt \leq \int_0^{\sqrt{3}} S_n(t) dt \leq \int_0^{\sqrt{3}} g'(t) dt \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) [g(t)]_0^{\sqrt{3}} \leq u_n \leq [g(t)]_0^{\sqrt{3}}$

D'où $\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \left(g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \underbrace{g(0)}_0 \right) \leq u_n \leq g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \underbrace{g(0)}_0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \leq u_n \leq g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

4°) $\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \leq u_n \leq g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = 1$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\ln\left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\ln\frac{2}{3} = \ln\frac{3}{2}$

Donc la suite (u_n) converge vers $\ln\frac{3}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$