أهم فقرات الدرس

الترتيب و المقارنة

مادة الرياضيات 9أساسي

I _ مقارنة عددين حقيقيين :

1) – قاعدة ① :

a و b عددان حقيقيان .

إذا كان $a-b\leq 0$ فإن $a\leq b$

إذا كان $a-b\geq 0$ فإن $a\geq b$

2) – أمثلة :

1) -- لنقارن العددين : $2\sqrt{3}-4$ و $\sqrt{3}-5$

لدينا :

$$\left(2\sqrt{3}-4\right)-\left(\sqrt{3}-5\right)=2\sqrt{2}-4-\sqrt{3}+5$$

$$=2\sqrt{3}-\sqrt{3}+5-4$$

$$=\sqrt{3}+1$$

و بما أن : $\sqrt{3}+1\geq 0$ فإن : $\left(2\sqrt{3}-4\right)-\left(\sqrt{3}-5\right)\geq 0$

و منه فإن : $2\sqrt{3}-4\geq\sqrt{3}-5$

2) -- لنقارن العددين : x و y بحيث : $x=y-3$.

لدينا : $x-y=-3$

و بما أن : $-3\leq 0$ فإن : $x-y\leq 0$.

و منه فإن : $x\leq y$

II _ الترتيب و المقارنة :

1) – الترتيب و الجمع :

أ) -- خاصية ① :

a و b و c أعداد حقيقية .

إذا كان $a\leq b$ فإن $a+c\leq b+c$

إذا كان $a+c\leq b+c$ فإن $a\leq b$

* مثال :

نعتبر x عددا حقيقيا بحيث : $x < 3$.
لنقارن العددين -2 و $x-5$.

لدينا : $x < 3$

يعني أن :

$$x + (-5) < 3 + (-5)$$

$$x - 5 < 3 - 5$$

و بالتالي فإن : $x - 5 < -2$

ب) -- خاصية ② :

a و b و c و d أعداد حقيقية .

إذا كان $\left.\begin{array}{l} a \le b \\ \text{و} \\ c \le d \end{array}\right\}$ فإن $a + c \le b + d$

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $x < 3$ و $2 > y$.
لنبين أن : $x + y < 5$.

لدينا : $\left.\begin{array}{l} x < 3 \\ 2 > y \end{array}\right\}$ يعني أن : $\left.\begin{array}{l} x < 3 \\ y < 2 \end{array}\right\}$

إذن : $x + y < 2 + 3$

و باتالي فإن : $x + y < 5$

2) – الترتيب و الضرب :

أ) -- خاصية ① :

a و b و c أعداد حقيقية .
إذا كان $a \le b$ و $c > 0$ فإن $a \times c \le b \times c$
إذا كان $a \le b$ و $c < 0$ فإن $a \times c \ge b \times c$
إذا كان $a \times c \le b \times c$ و $c > 0$ فإن $a \le b$
إذا كان $a \times c \ge b \times c$ و $c < 0$ فإن $a \le b$

* مثال :

لدينا : $11 \le 27$ يعني أن $11 \times 5 \le 27 \times 5$

$11 \leq 27$ يعني أن $11\times(-4) \geq 27\times(-4)$

ب) -- خاصية ② :

a و b و c و d أعداد حقيقية .

إذا كان $\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ \text{و} \\ c \leq d \end{array}\right\}$ فإن $a\times c \leq b\times d$

* مثال :

x و y عددان حقيقيان موجبان بحيث : $x < \sqrt{3}$ و $y < 2\sqrt{6}$.

لنبين أن : $xy < 6\sqrt{3}$.

لدينا :

و $\left.\begin{array}{l} x < \sqrt{3} \\ y < 2\sqrt{6} \end{array}\right\}$ يعني أن :

$$x \times y < \sqrt{3}\times 2\sqrt{6}$$
$$xy < 2\sqrt{3\times 6}$$
$$xy < 2\sqrt{18}$$
$$xy < 2\sqrt{9\times 2}$$
$$xy < 2\sqrt{3^2\times 2}$$
$$xy < 2\times 3\sqrt{2}$$

وبالتالي فإن : $xy < 6\sqrt{2}$

3) – الترتيب و المقلوب :

أ) -- خاصية :

a و b عددان حقيقيان موجبان قطعا .

إذا كان $a \leq b$ فإن $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

إذا كان $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ فإن $a \leq b$

ب) -- مثال :

لدينا : $7 \leq 13$ يعني أن $\frac{1}{7} \geq \frac{1}{13}$

$11 \geq 5$ يعني أن $\frac{1}{11} \leq \frac{1}{5}$

4) – الترتيب و المربع :

أ) -- خاصية ① :

a و b عددان حقيقيان موجبان .
إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \leq b^2$
إذا كان $a^2 \leq b^2$ فإن $a \leq b$

* مثال :

$5 \leq 11$ يعني أن $5^2 \leq 11^2$ أي $25 \leq 121$.

ب) -- خاصية ② :

a و b عددان حقيقيان سالبان .
إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \geq b^2$
إذا كان $a^2 \geq b^2$ فإن $a \leq b$

* مثال :

$-7 \leq -2$ يعني أن $(-7)^2 \geq (-4)^2$ أي $49 \geq 16$

5) – الترتيب و الجذر المربع :

أ) -- خاصية :

a و b عددان حقيقيان موجبان .
إذا كان $a \leq b$ فإن $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$
إذا كان $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ فإن $a \leq b$

* أمثلة :

1) – لنقارن العددين : $\sqrt{10}$ و $3\sqrt{3}$.

لدينا :

$\left.\begin{array}{l}\sqrt{10}^2 = 10 \\ \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 27\end{array}\right\}$ و إذن $\sqrt{10}^2 \leq \left(3\sqrt{3}\right)^2$ و منه فإن $\sqrt{10} \leq 3\sqrt{3}$

2) – لنقارن العددين : $-\sqrt{6}$ و $-3\sqrt{2}$.

لدينا :

و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{6}^2=6\\(3\sqrt{2})^2=18\end{array}\right\}$ إذن $\sqrt{6}^2\leq(3\sqrt{2})^2$ و منه فإن $\sqrt{6}\leq 3\sqrt{2}$. و بالتالي فإن : $-\sqrt{6}\geq -3\sqrt{2}$

III _ التأطيـر :

1) – تأطيـر مجموع عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث :

$x\leq a\leq y$ و $z\leq b\leq t$

$x+z\leq a+b\leq y+t$

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3\leq x\leq 8$ و $-4\leq y\leq 2$

لنؤطر $x+y$.

لدينا :

$$3+(-4)\leq x+y\leq 8+2$$

إذن : $-1\leq x+y\leq 10$

2) – تأطيـر مقابل عدد حقيقي :

a عدد حقيقي بحيث : $x\leq a\leq y$

سيكون لدينا : $-y\leq -a\leq -x$

3) – تأطيـر فرق عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث :

$x\leq a\leq y$ و $z\leq b\leq t$

$x-t\leq a-b\leq y-z$

* ملاحظة هامة : لتأطير $a-b$ ، نضع : $a-b=a+(-b)$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه .

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3\leq x\leq 8$ و $-4\leq y\leq 2$

لنؤطر $x-y$.

لدينا :

$-2\leq -y\leq 4$ و $3\leq x\leq 8$

إذن : $3-2\leq x+(-y)\leq 8+4$

و منه فإن : $1\leq x-y\leq 12$

4) – تأطيـر جداء عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية موجبة بحيث :

$x\leq a\leq y$ و $z\leq b\leq t$

$x\times z\leq a\times b\leq y\times t$

*** مثال 1 :**

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3\leq x\leq 7$ و $1\leq y\leq 3$

لنؤطـر $x\times y$.

لدينا :

$$3\times 1\leq x\times y\leq 7\times 3$$

إذن : $3\leq x\times y\leq 21$

*** مثال 2 :**

x و y عددان حقيقيان بحيث : $-5\leq x\leq -2$ و $3\leq y\leq 6$

لنؤطـر $x\times y$.

لدينا :

$$2\leq -x\leq 5$$

إذن :

$2\times 3\leq (-x)\times y\leq 5\times 6$ أي $6\leq -xy\leq 30$

و منه فإن : $-30\leq xy\leq -6$.

5) – تأطيـر مقلوب عدد حقيقي غير منعدم :

a و x و y أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $x\leq a\leq y$

سيكون لدينا : $\frac{1}{y}\leq\frac{1}{a}\leq\frac{1}{x}$

6) – تأطيـر خارج عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث : $b\neq 0$ و $z\neq 0$ و $t\neq 0$

و $x\leq a\leq y$ و $z\leq b\leq t$

سيكون لدينا $\frac{x}{t}\leq\frac{a}{b}\leq\frac{y}{z}$

* ملاحظة هامة : لتأطير $\frac{a}{b}$ ، نضع : $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه .

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3\le x\le 7$ و $5\le y\le 9$

لنؤطر $\frac{x}{y}$.

لدينا :

$$\frac{1}{9}\le\frac{1}{y}\le\frac{1}{5}$$

إذن :

$$3\times\frac{1}{9}\le x\times\frac{1}{y}\le 7\times\frac{1}{5}$$ أي $$\frac{3}{9}\le\frac{x}{y}\le\frac{7}{5}$$

و بالتالي فإن : $\frac{1}{3}\le\frac{x}{y}\le\frac{7}{5}$

* تمرين تطبيقي :

a و b و c أعداد حقيقية بحيث :

$6\le a\le 8$ و $-4\le b\le -2$ و $-3\le c\le 5$

أطـر : a^2 و b^2 و $a+2b-4c$ و $\frac{a+b}{b^2}$

الحـل :

1) – تأطير a^2 .

لدينا : $6^2\le a^2\le 8^2$ و منه فإن : $36\le a^2\le 64$

2) – تأطير b^2 .

لدينا : $(-2)^2\le b^2\le(-4)^2$ و منه فإن : $4\le b^2\le 16$

3) – تأطير $a+2b-4c$.

لدينا : $-8\le 2b\le -4$

و $-4\times(-3)\le -4c\le -4\times 5$ أي $12\le -4c\le 20$

إذن : $6+(-8)+12\le a+2b-4c\le 8+(-4)+20$

و منه فإن : $10\le a+2b-4c\le 24$

4) – تأطير $\frac{a+b}{b^2}$.

لدينا : $6+(-4)\le a+b\le 8+(-2)$ أي $2\le a+b\le 6$

و $\frac{1}{16} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4}$

إذن : $2 \times \frac{1}{16} \leq (a+b) \times \frac{1}{b^2} \leq 6 \times \frac{1}{4}$ أي $\frac{2}{16} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{6}{4}$

و بالتالي فإن : $\frac{1}{8} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{3}{2}$