Corrigé

Exercice 1

1. a) $2\times3+5\times0=6$ donc le couple $(3,0)$ est une solution de (E).

   b) Le couple $(3,0)$ est une solution de (E) donc $2x+5y=2\times3+5\times0 \Leftrightarrow 2(x-3)=-5y \quad (*)$

   donc $\begin{cases} 2 \mid 5y \\ 2\wedge 5=1 \end{cases}$ d'où d'après Gausse $2\mid y$ par suite il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $y=2k$.

   En remplaçant y par sa valeur trouvée dans $(*)$ on obtient $x=-5k+3,\ k\in\mathbb{Z}$.

   Réciproquement : Pour tout $k\in\mathbb{Z},\ 2(-5k+3)+5(2k)=6$.

   Ainsi $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(-5k+3,2k),\ k\in\mathbb{Z}\}$

2. a) Soit (x,y) une solution de (E), $\begin{cases} x\wedge y \mid x \\ x\wedge y \mid y \end{cases}$ donc $x\wedge y \mid 2x+5y=6$, il en résulte que

   $x\wedge y\in D_6^+=\{1,2,3,6\}$.

   b) Soit (x,y) une solution de (E), $x\wedge y\equiv 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -5k+3\equiv 0 \pmod 3 \\ 2k\equiv 0 \pmod 3 \\ k\equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$ donc

   $\begin{cases} -5k+3\equiv 0 \pmod 3 \\ 4k\equiv 0 \pmod 3 \\ k\equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} k\equiv 0 \pmod 3 \\ k\equiv 0 \pmod 2 \\ 2\wedge 3=1 \end{cases}$ donc $k=6n,\ n\in\mathbb{Z}$, il en résulte que

   $\begin{cases} x=-30n+3 \\ y=12n \end{cases},\ n\in\mathbb{Z}$.

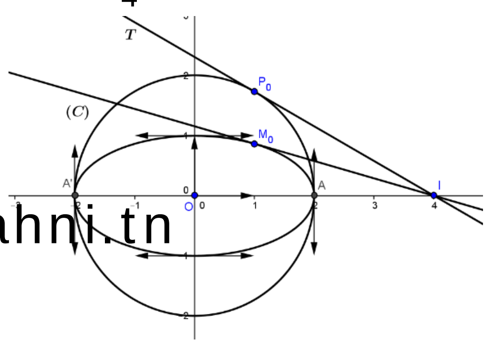
   Réciproquement : Si $\begin{cases} x=-30n+3 \\ y=12n \end{cases},\ n\in\mathbb{Z},\ 2x+5y=2(-30n+3)+5(12n)=6$ donc (x,y) est une solution de (E) de plus $\begin{cases} x=-30n+3\equiv 0 \pmod 3 \\ y=12n\equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$ et x est impair donc elle n'est pas divisible par 6, d'où $x\wedge y\equiv 3$. Ainsi $x\wedge y\equiv 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-30n+3 \\ y=12n \end{cases},\ n\in\mathbb{Z}$.

Exercice 2

1. a) $\begin{cases} X=x \\ Y=\dfrac{y}{2} \end{cases}$.

   b) $P(x,y)\in C$ donc $x^2+y^2=4$ donc $X^2+4Y^2=4$ donc $\dfrac{X^2}{4}+Y^2=1$. Ainsi $M(X,Y)$ varie sur l'ellipse d'équation $\dfrac{X^2}{4}+Y^2=1$.

   c)



2. a) $\overrightarrow{IP_0}\begin{pmatrix}-3\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OP_0}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OP_0}.\overrightarrow{IP_0}=3-3=0$ donc la droite (IP_0) est tangente à C en P_0.

On en déduit que (T) coupe l'axe des abscisses en I.

b) Soit (T') la tangente à (E) en M_0, alors $(T'):\dfrac{X}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}Y=1$.

pour $Y=0$ on obtient $X=4$ ce qui prouve que $I\in(T')$.

Exercice 3

I. 1) La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x\in[0,+\infty[$,

$$f'(x)=1-\frac{2x}{1+x^2}=\frac{1+x^2-2x}{1+x^2}=\frac{(x-1)^2}{1+x^2}.$$

2) a) Pour tout $x>0$,

$$f(x)=x-\ln(1+x^2)=x-\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)=x-\ln(x^2)-\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=x-2\ln x-\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-2\dfrac{\ln x}{x}\right)-\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty.$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-2\frac{\ln x}{x}\right)-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}=1.$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}-2\ln x-\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty.$. C admet une branche parabolique

de direction celle de la droite $y=x$ au voisinage de $+\infty$.

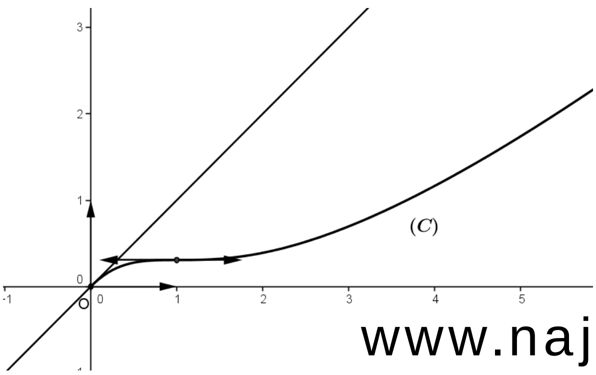
3)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
f	0	$\longrightarrow$	$+\infty$

4) a) $\Delta: y=f_d'(0)x+f(0)=x$.

b) Pour tout $x\in[0,+\infty[$, $f(x)-x=-\ln(1+x^2)\le 0$ car $1+x^2\ge 1$ donc la courbe C est au-dessous de Δ.

c)



II. 1) a) La fonction $u : x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

donc $u\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) \subset \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$. On en déduit que G est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, G'(x) = \frac{1}{1+\tan^2 x}\left(1+\tan^2 x\right) = 1.$

b) On sait que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, G'(x) = 1$ donc $G(x) = x + c,\ c \in \mathbb{R}$. Or $G(0) = 0$, il en résulte que $c = 0$ Ainsi pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, G(x) = x.$

c) $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = G\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$

2) a) $\begin{cases} u(x) = \ln\left(1+x^2\right) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \\ v(x) = x \end{cases}$

$$\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx = \left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \ln 2 - 2\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx$$

$$= \ln 2 - 2\left[\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}dx\right] = \ln 2 - 2\left[1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx\right] = \ln 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

b) $\mathcal{A} = \int_0^1 \left|f(x) - x\right|dx = \int_0^1 \left[x - f(x)\right]dx = \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx = \ln 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

$= \ln 2 - 2 + 2 \times \frac{\pi}{4} = \left(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\right)u.a$

Exercice 4

1) a) $q^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 1 - q.$

b) $FG = FB = AE = AD - DE = AD - DC = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = q.$

$EG = EF - FG = 1 - q = q^2.$

2) a) $\begin{cases} \left(\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FG}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \frac{FG}{FC} = \frac{q}{1} = q \end{cases}$ donc $S_1(C) = G.$

b) FCDE est un carré direct donc son image par S_1 est un carré direct, or $S_1(F) = F$, $S_1(C) = G$ et

BFGH est un carré direct donc l'image du carré FCDE par S_1 est le carré BFGH.

3) $\begin{cases} \theta \equiv \left(\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GE}\right)[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ k = \frac{GE}{GH} = \frac{q^2}{q} = q \end{cases}$

4) a) $\begin{cases} \left(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FB}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \\ \dfrac{FB}{FE} = \dfrac{q}{1} = q \end{cases}$ donc $S_1(E) = B$ et puisque $S_1(C) = G$, $S_1(F) = F$ et l'image du carré FCDE par S_1 est le carré BFGH, il en résulte que $S_1(D) = H$.

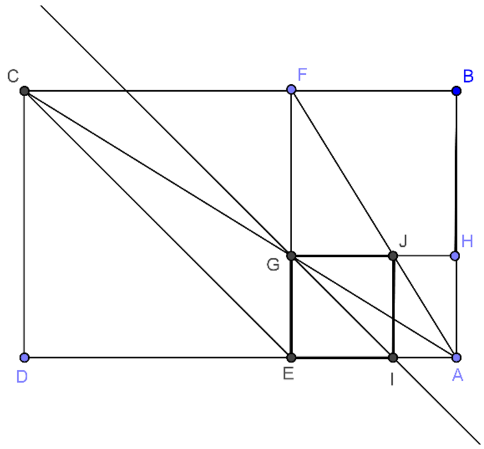
$h(D) = S_2(S_1(D)) = S_2(H) = E$.

b) h est la composée de deux similitudes directes de même rapport q et d'angles respectives $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ donc h est une similitude directe de rapport $q^2 \neq 1$ et d'angle nul, il en résulte que h est une homothétie de rapport q^2.

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et de même sens donc $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AD}$, $\alpha > 0$
Donc $\alpha = \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{q}{\frac{1}{q}} = q^2$. On en déduit que $\overrightarrow{AE} = q^2\overrightarrow{AD}$ et h est l'homothétie de rapport q^2 qui envoie E en D donc A est le centre de h.

d) $h(C) = S_2(S_1(C)) = S_2(G) = G$, il en résulte que A, G et C sont alignés.

e) $h(E) = S_2(S_1(E)) = S_2(B) = I$ donc $S_2(B) = I$
$h(F) = S_2(S_1(F)) = S_2(F) = J$ donc $S_2(F) = J$ et puisque $S_2(G) = G$ et $S_2(H) = E$ il en résulte que l'image du carré BFGH par S_2 est le carré IJGE.



5) a) $a_0 = q^0 = 1 = FC^2 = A_{FCDE}$, $a_1 = q^2 = FG^2 = A_{BFGH}$ et $a_2 = q^4 = EG^2 = A_{GEIJ}$

b) $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \left(q^2\right)^n = \dfrac{1-\left(q^2\right)^{n+1}}{1-q^2} = \dfrac{1-q^{2n+2}}{1-q^2}$.

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{2n+2}}{1-q^2} = \frac{1}{1-q^2} = \frac{1}{q} \quad (0<q<1).$$

$$A_{ABCD} = CD \times AD = AD = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{q}.$$