

الاختبار : الرياضيات		الجمهورية التونسية وزارة التربية ****
ضارب الاختبار: 2	الحصة : ساعتان	امتحان شهادة ختم التعليم الأساسي العام تورة 2018

التصريح الأول (3 نقاط)

يلي كل سؤال ثلاث إجابات، واحدة منها فقط صحيحة .

أكتب على ورقة تحريرك رقم السؤال والإجابة الصحيحة الموافقة له.

(1) ليكن (O, I, J) معينا في المستوي والنقاط $A(1, -1)$ و $B(3, 2)$ و $C(1, 1)$.

إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع، فإن إحداثيات النقطة D هي :

- (أ) $(-2, -1)$ (ب) $(-1, -2)$ (ج) $(-2, -3)$

(2) يمثل الجدول التالي التكرارات التراكمية المساعدة لسلسلة إحصائية.

2	1	0	-1	-2	القيمة
20	18	13	9	5	التكرار التراكمي المساعد

التكرار الموافق للقيمة صفر هو :

- (أ) 13 (ب) 0
(3) العدد $27^{2018} - 2 \times 27^{2017}$ يقبل القسمة على :
(أ) 6 (ب) 12 (ج) 4 (د) 15

التصريح الثاني (4 نقاط)

نعتبر العددين الحقيقيين الموجبين a و b حيث $a^2 = 11 + 6\sqrt{2}$ و $b^2 = 11 - 6\sqrt{2}$.

(1) (أ) قارن العددين a^2 و b^2 .

(ب) بين أن $(a - b)$ عدد موجب.

(2) أحسب $a^2 b^2$ ثم استنتج أن $ab = 7$.

(3) أحسب $(a - b)^2$ ثم استنتج أن $a - b = 2\sqrt{2}$.

(وحدة قياس الطول الصنتمتر)

في الرسم المقابل لدينا :

- ABC مثلث متقايس الضلعين وقام في A ، حيث $AB = a$

- E النقطة من $[AC]$ حيث $AE = b$

- H المسقط العمودي للنقطة E على (BC) .

(4) (أ) بين أن المثلث HEC متقايس الضلعين.

(ب) بين أن $EH = 2$.

(5) لتكن S مساحة المثلث BEC .

(أ) بين أن $S = a\sqrt{2}$.

(ب) بين أيضا أن $S = 2 + 3\sqrt{2}$ ، ثم استنتج أن $a = 3 + \sqrt{2}$.

(وحدة قياس الطول الصنتمتر)

التصريح الثالث (4 نقاط)

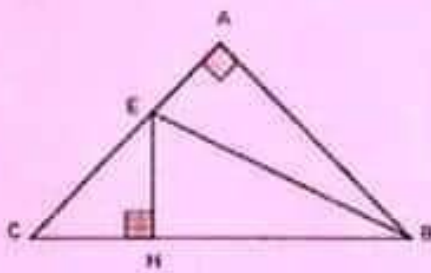
ABC مثلث متقايس الضلعين وقمته الرئيسية A حيث $BC = 2$ و $AB \geq 3$.

لتكن النقطة D مناظرة النقطة C بالنسبة إلى A ، و H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) .

المستقيمان (AB) و (DH) يتقاطعان في النقطة G .

(1) (أ) بين أن المثلث BCD قائم في B .

(ب) بين أن G مركز ثقل المثلث BCD .



في الأسئلة الموالية، نفترض أن $AB = x + 3$ حيث x عدد حقيقي موجب.

(2) أ) بين أن $BD^2 = 4(x^2 + 6x + 8)$.

ب) بين أن $BD = 2\sqrt{35}$ يعني $x^2 + 6x - 27 = 0$.

(3) أ) بين أن $x^2 + 6x - 27 = (x + 3)^2 - 36$.

ب) استنتج أن $x^2 + 6x - 27 = (x - 3)(x + 9)$.

ج) أوجد x حيث $BD = 2\sqrt{35}$ ، ثم استنتج البعد BG .

التصريح الرابع (5 نقاط) (وحدة قياس الطول الصنتمتر)

A و B نقطتان من المستوي، حيث $AB = 6$ و I منتصف قطعة المستقيم $[AB]$. لتكن \mathcal{C} الدائرة التي قطرها $[AB]$ و C نقطة من \mathcal{C} ، حيث $AC = 5$.

(1) أحسب BC .

(2) المماس للدائرة \mathcal{C} في النقطة B يقطع (AC) في النقطة D.

أ) بين أن $CD = \frac{11}{5}$.

ب) أحسب BD .

(3) المستقيم العمودي على (AC) في النقطة D يقطع (AB) في النقطة E. لتكن \mathcal{C}' الدائرة التي قطرها $[DE]$ و مركزها O. المستقيم المار من D والموازي للمستقيم (AB) يقطع \mathcal{C}' في النقطة F مخالفة للنقطة D.

أ) بين أن الرباعي BDFE مستطيل.

ب) الدائرتان \mathcal{C} و \mathcal{C}' تتقاطعان في نقطة H مخالفة للنقطة B.

اثبت أن النقاط A و H و F على استقامة واحدة.

(4) المستقيمان (AO) و (FI) يتقاطعان في النقطة G والمستقيمان (BG) و (AF) يتقاطعان في النقطة K.

أ) بين أن K منتصف $[AF]$.

ب) أثبت أن G مركز ثقل المثلث AED.

ج) المستقيمان (EG) و (AD) يتقاطعان في النقطة J. بين أن النقاط J و K و O على استقامة واحدة.

التصريح الخامس (4 نقاط) (وحدة قياس الطول الصنتمتر)

ليكن ABCDEFGH متوازي مستطيلات حيث $AB = 6$ و $AE = 4$ و $AD = 3$.

(1) أ) بين أن ADG مثلث قائم في D.

ب) أحسب AG و DG .

(2) لتكن M النقطة من $[AE]$ حيث $AM = 3$ و Δ المستقيم العمودي على المستوي (AED) في النقطة M.

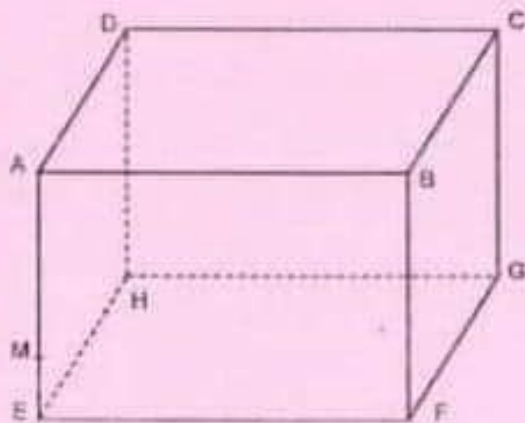
أ) بين أن Δ محتو في المستوي (AEF) .

ب) المستقيم Δ يقطع المستقيم (AF) في النقطة N.

بين أن $\frac{AM}{AE} = \frac{MN}{EF}$

ج) أحسب MN ثم DN .

(3) أحسب حجم الهرم NMAD.



اختبار الرياضيات لدورة 2018
لشهادة ختم التعليم الأساسي

تمرين 1 (3ن)

(1) ب (1) ج (2) د (3) هـ (1)

1- ABCD متوازي أضلاع اذن قطراه يتقاطعان في المنتصف ومنه

$$\frac{y_a + y_c}{2} = \frac{y_b + y_d}{2}$$

يعني $\frac{y_a + y_c}{2} = 0$ يعني $y_a = -2$ (يمكن الإجابة على السؤال بلحاز معين للنقاط)

-2 $13 - 9 = 4$

-3 $27^{2018} - 2 \times 27^{2017} = 27^{2017} \times (27 - 2)$
 $= 27^{2017} \times 25 = 15 \times 27^{2016} \times 45 = M_{25}$

تمرين 2 (4ن)

بعض العنصر المتعلق بالبرهان « و » حيث $a^2 = 11 + 6\sqrt{2}$ و $b^2 = 11 - 6\sqrt{2}$

(1) قارن العندين a^2 و b^2
بمعان $-6\sqrt{2} < 6\sqrt{2}$ فإن $11 - 6\sqrt{2} < 11 + 6\sqrt{2}$
يعني $b^2 < a^2$

(ب) بين ان $(a - b)$ عدد موجب.

لدينا $b^2 < a^2$ وبمعان a و b عددين موجبيين فإن $b < a$ يعني $a - b > 0$ ومنه $(a - b)$ عدد موجب
(2) أصب $a^2 b^2$ ثم استنتج ان $ab = 7$.

لدينا $a^2 b^2 = (11 + 6\sqrt{2})(11 - 6\sqrt{2})$
 $= 11^2 - (6\sqrt{2})^2 = 121 - 72 = 49$
بمعان $ab = 7$ فإن $ab \geq 0$ و $(ab)^2 = 49 = 7^2$

(3) أصب $(a - b)^2$ ثم استنتج ان $a - b = 2\sqrt{2}$

لدينا: $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
 $= 11 + 6\sqrt{2} - (2 \times 7) + 11 - 6\sqrt{2} = 8$

وبمعان $(a - b)$ عدد موجب فإن $a - b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

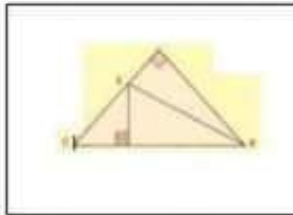
ABC مثلث متقايس الضلعين وقدم في A، حيث $AB = a$
E النقطة من [AC] حيث $AE = b$

(4) بين ان المثلث HEC متقايس الضلعين

بمعان المثلث ABC متقايس الضلعين وقدم في A فإن $\hat{ACB} = \hat{ABC} = 45^\circ$

في المثلث HEC لدينا: $\hat{ECH} = \hat{ACB} = 45^\circ$ و $\hat{CHE} = 90^\circ$

لأن $\hat{CEH} = 180 - (90 + 45) = 45^\circ$ وبمثلث المثلث HEC متقايس الضلعين (له زاويتان متقايستان) فمنه الزاوية H.



(ب) بين ان $EH = 2$

لتبنا $EC = AC - AE = a - b = 2\sqrt{2}$

المثلث HEC قائم ومتقايس الضلعين (وتره يمثل قطر للمربع الذي ضلعه $[EH]$)

0.5

بين ان $EC = EH\sqrt{2}$ يعني $EH = \frac{EC}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$

(5) تكون S مساحة المثلث BEC .

(أ) بين ان $S = a\sqrt{2}$

المثلث ABC قائم ومتقايس الضلعين في A - ان $BC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$ مساحة المثلث BEC هي

0.5

$S = \frac{BC \times EH}{2} = \frac{a\sqrt{2} \times 2}{2} = a\sqrt{2}$

(ب) بين لبيان ان $S = 2 + 3\sqrt{2}$ ثم استنتج ان $a = 3 + \sqrt{2}$

لتكن S_1 مساحة المثلث ABC و S_2 مساحة المثلث ABE

ان

0.25

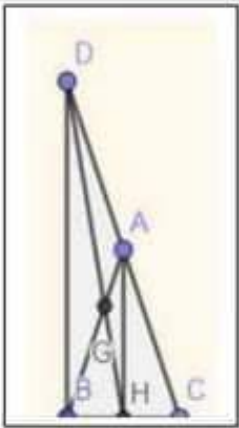
$S = S_1 - S_2 = \frac{AB^2}{2} - \frac{AB \times AE}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a \times b}{2} = \frac{11 + 6\sqrt{2} - 7}{2} = \frac{4 + 6\sqrt{2}}{2} = 2 + 3\sqrt{2}$

وبالتالي $a\sqrt{2} = 2 + 3\sqrt{2}$ يعني $a = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 3)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 3$

0.25

تمرين 3(4)

ABC مثلث قائم المتساوي وقته الارتفاع A حيث $BC = 2$ و $AB \geq 3$
 تقع النقطة D خارجاً النقطة C بحيث A
 و H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) .
 المستقيمان (AB) و (DH) يتقاطعان في النقطة G .
 (1) بين ان المثلث BCD قائم في B



في المثلث BCD لدينا $\left. \begin{array}{l} A \text{ منتصف } [DC] \text{ لأن } C \text{ و } D \text{ متطابقتان بالنسبة إلى } A \\ AB = AC = AD \end{array} \right\}$

0.5

إن المثلث BCD قائم في B (وتره $[DC]$)

(ب) بين أن G مركز ثقل المثلث BCD .

المثلث ABC متساوي الساقين لقمة الرأسية A و $[AH]$ ارتفاعه الموافق للضلع $[BC]$

لأن فهو كذلك مواسطه الضلعين من A ومنه H منتصف $[BC]$.

في المثلث BCD لدينا: $[BA]$ و $[DH]$ هما الواسطتين الضلعين عبر القوتين من B و D

0.5

إن نقطة تقاطعهما G هي مركز ثقل هذا المثلث.

نفرض أن $AB = x + 3$ حيث x عدد حقيقي موجب.

$$(2) \text{ أ) بين أن } BD^2 = 4(x^2 + 6x + 8)$$

لدينا: $AC = AB = x + 3$ و $DC = 2AC = 2(x + 3)$

المثلث BCD قائم لأن حسب نظرية فيثاغورس فإن: $BD^2 + BC^2 = DC^2$

$$BD^2 = DC^2 - BC^2 = [2(x + 3)]^2 - 2^2 = 4(x + 3)^2 - 4 = 4[(x + 3)^2 - 1] \\ = 4(x^2 + 6x + 9 - 1) = 4(x^2 + 6x + 8)$$

0.75

(ب) بين أن $BD = 2\sqrt{35}$ يعني $x^2 + 6x - 27 = 0$

بما أن BD موجب فإن: $BD = 2\sqrt{35}$ يعني $BD^2 = (2\sqrt{35})^2 = 140$ يعني $4(x^2 + 6x + 8) = 140$

0.5

$$\text{يعني } x^2 + 6x + 8 = \frac{140}{4} = 35 \text{ يعني } x^2 + 6x + 8 - 35 = 0 \text{ يعني } x^2 + 6x - 27 = 0$$

0.5

$$(3) \text{ أ) بين أن } x^2 + 6x - 27 = (x + 3)^2 - 36$$

$$(x + 3)^2 - 36 = x^2 + 6x + 9 - 36 = x^2 + 6x - 27$$

$$\text{ب) استنتج أن } x^2 + 6x - 27 = (x - 3)(x + 9)$$

لدينا:

0.5

$$x^2 + 6x - 27 = (x + 3)^2 - 36 = (x + 3)^2 - 6^2 = (x + 3 - 6)(x + 3 + 6) = (x - 3)(x + 9)$$

(ج) أوجد x حيث $BD = 2\sqrt{35}$ ثم استنتج البعد BG

$$BD = 2\sqrt{35} \text{ يعني } BD^2 = 140 \text{ يعني } x^2 + 6x - 27 = 0 \text{ يعني } (x - 3)(x + 9) = 0 \text{ يعني } x + 9 = 0 \text{ أو } x - 3 = 0 \text{ يعني } x = -9 \text{ أو } x = 3$$

0.5

وبما أن x عدد حقيقي موجب فإن $x = 3$

نعلم أن G مركز ثقل المثلث BCD و $[BA]$ مواسطه الضلعين من B لأن $BG = \frac{2}{3}BA = \frac{2}{3} \times (3 + 3) = 4$

0.25

تمارين 4 (5ن)

A و B نقطتان من المستوي، حيث $AB = 6$ وامتدتا لتصبحا القطر $[AB]$ لكن \odot الدائرة التي قطرها $[AB]$

و C نقطة من \odot ، حيث $AC = 5$.

(1) أوجد BC.

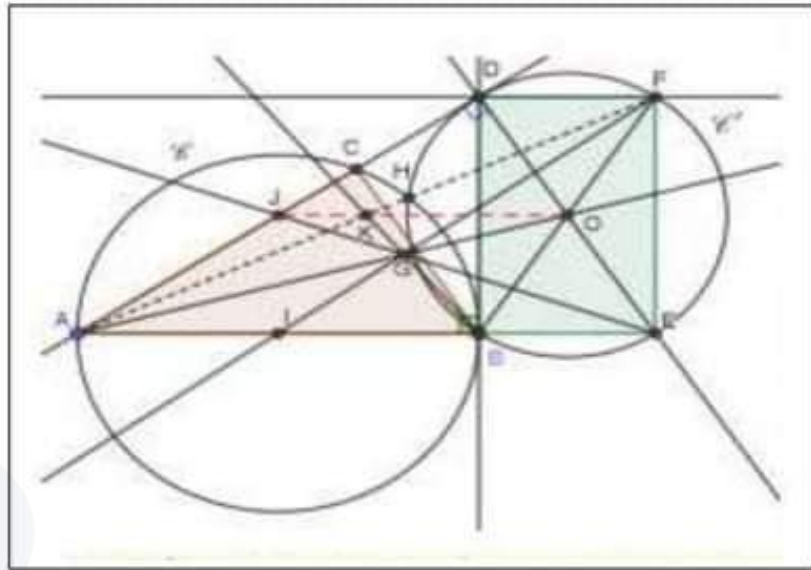
لدينا \odot دائرة و $[AB]$ قطرها و C نقطة عليها حيث $C \neq B, C \neq A$ إذن المثلث ABC قائم في C

حسب نظرية فيثاغورس فإن: $BC^2 + AC^2 = AB^2$ إذن $BC^2 = AB^2 - AC^2$

$$BC^2 = 6^2 - 5^2 = 36 - 25$$

0.5

$$BC = \sqrt{11}$$



(2) القطر AD من \odot في القطعة BC يقطع (AC) في النقطة E .

$$CD = \frac{11}{5}$$

المثلث ABD قائم في B و $[BC]$ ارتفاعه المستقر من B. فإن $BC^2 = AC \times CD$

0.75

$$CD = \frac{BC^2}{AC} = \frac{11}{5}$$

ومنه

(ب) أوجد BD.

المثلث BCD قائم في C. حسب نظرية فيثاغورس فإن $BD^2 = BC^2 + CD^2$

$$BD^2 = \left(\frac{11}{5}\right)^2 + (\sqrt{11})^2 = \frac{121}{25} + \frac{11 \times 25}{1 \times 25} = \frac{121 + 275}{25} = \frac{396}{25}$$

يعني

0.5

$$BD = \sqrt{\frac{396}{25}} = \frac{6}{5} \sqrt{11}$$

ومنه

A و B نقطتان من المستوى، حيث $AB = 6$ وامتدتا لتشكلان القطر $[AB]$ لكن ω الدائرة التي قطرها $[AB]$

و C نقطة من ω ، حيث $AC = 5$.

(1) أوجد BC.

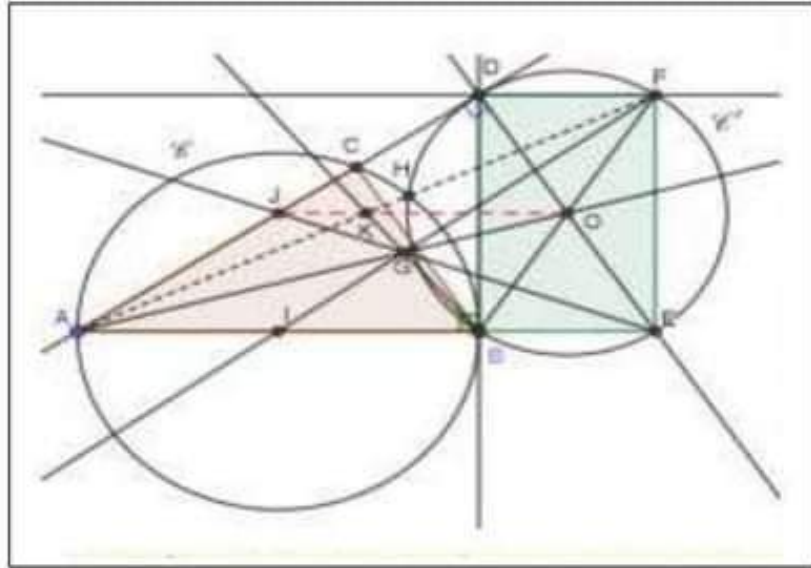
لدينا: ω دائرة و $[AB]$ قطرها و C نقطة منها حيث $C \neq B, C \neq A$ إذن المثلث ABC قائم في C

بحسب نظرية فيثاغورس فإن: $BC^2 + AC^2 = AB^2$ إذن $BC^2 = AB^2 - AC^2$

$$BC^2 = 6^2 - 5^2 = 36 - 25$$

0.5

$$BC = \sqrt{11}$$



(2) القطر BD للدائرة ω' في القطعة BE يقطع (AC) في النقطة D .

(أ) من أن $CD = \frac{11}{5}$

المثلث ABD قائم في B و $[BC]$ ارتفاعه المستقر من B. فإن $BC^2 = AC \times CD$

0.75

$$CD = \frac{BC^2}{AC} = \frac{11}{5}$$

ومنه

(ب) أوجد BD.

المثلث BCD قائم في C. بحسب نظرية فيثاغورس فإن $BD^2 = BC^2 + CD^2$

$$BD^2 = \left(\frac{11}{5}\right)^2 + (\sqrt{11})^2 = \frac{121}{25} + \frac{11 \times 25}{1 \times 25} = \frac{121 + 275}{25} = \frac{396}{25}$$

يعني

0.5

$$BD = \sqrt{\frac{396}{25}} = \frac{6}{5} \sqrt{11}$$

ومنه

3) المستقيم العمودي على (AC) في النقطة D يقطع (AB) في النقطة E. أثبت أن: الزاوية التي يقطعها [DE] و مركزها O. المستقيم المار من O والجزء المستقيم (AB) يقطع في النقطة F متطابقا للنقطة D.

(أ) بين أن الرباعي BDFE مستطيل.

* في دائرة و [DE] قطر لها و F نقطة منها حيث $F \neq E$ و $F \neq D$ إذن $\hat{D\hat{F}E} = 90^\circ$

و لنا $\hat{D\hat{B}E} = 90^\circ$ لأن $\hat{D\hat{B}A} = 90^\circ$ و $E \in (AB)$

* لنا $(DF) \parallel (AB)$ و $(DB) \perp (AB)$ إذن $(DB) \perp (DF)$ ومنه $\hat{B\hat{D}F} = 90^\circ$

0.75

بقائتي الرباعي BDFE له 3 زوايا قائمة فهو مستطيل.

(ب) افترض أن O و M تتقاطعان في نقطة H متطابقا للنقطة B. أثبت أن النقاط A و H و F على استقامة واحدة.

المثلث AHB يقبل الأرتسام في الدائرة في التي يقطعها [AB] يمثل أحد أضلاعه إن فهو قائم في H ومنه $(AH) \perp (BH)$

المثلث FHB يقبل الأرتسام في الدائرة في التي يقطعها [BF] أحد أضلاعه إن فهو قائم في H

ومنه $(FH) \perp (BH)$ إذن $(FH) \parallel (AH)$ وبالتالي النقاط A و H و F على استقامة واحدة.

0.5

4) المستقيمان (AO) و (FI) يتقاطعان في نقطة G والمستقيمان (BG) و (AF) يتقاطعان في نقطة K.

(أ) بين أن K منتصف [AF]

في المثلث ABF لنبدأ: $\left. \begin{array}{l} [AO] \text{ هو المتوسط الصادر من } A \\ [FI] \text{ هو المتوسط الصادر من } F \end{array} \right\}$ و يمثل $(FI) \cap (AO) = \{G\}$

0.75

فإن G مركز ثقل المثلث ABF ومنه $AG = \frac{2}{3}AO$

(BG) هو المستقيم الحامل للمتوسط الصادر من B. وحيث أن $(BG) \cap (AF) = \{K\}$ فإن K منتصف [AF]

0.25

(ب) أثبت أن G مركز ثقل المثلث AED.

[AO] هو المتوسط الصادر من A للمثلث ADE ولنا $G \in [AO]$ بحيث $AG = \frac{2}{3}AO$ وبالتالي G مركز ثقل المثلث AED

0.75

(ج) المستقيمان (EG) و (AD) يتقاطعان في النقطة J. بين أن النقاط J و K و O على استقامة واحدة.

لنا G مركز ثقل المثلث ADE إذن (EG) هو المستقيم الحامل للمتوسط الصادر من E وحيث أن $(EG) \cap (AD) = \{J\}$ فإن J منتصف [AD].

في المثلث ABF لنا: O منتصف [BF] و K منتصف [AF] إذن $(OK) \parallel (AB)$

في المثلث ADE لنا: O منتصف [DE] و J منتصف [AD] إذن $(OJ) \parallel (AE)$

وبما أن $(AB) \parallel (AE)$ فإن $(OK) \parallel (OJ)$ ومنه النقاط J و K و O على استقامة واحدة.

لكن ABCDEFGH مخروط مستطيل حيث $AB=6$ و $AE=4$ و $AD=3$
 (1) ا) اذن ان المثلث ADG قائم في D .

لنا: $\left. \begin{array}{l} (AD) \perp (DC) \\ (AD) \perp (DH) \end{array} \right\}$ لان (ABCD) مستطيل و (ADHE) مستطيل

وبما ان المستقيمين (DC) و (DH) محتويين في المستوى (DCG) ومقاطعهم في D

فان (AD) يعامد المستوى (DCG) في D .

لنا $(DG) \subset (DCG)$ اذن $(AD) \perp (DG)$ في D ومنه المثلث ADG قائم في D .

ب) احسب AG و DG .

المثلث DCG قائم في C . اذن حسب نظرية فيثاغورس: $DG^2 = DC^2 + CG^2$

$$DG^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$$

$$DG = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \quad \text{اذن}$$

[AG] هو قطر لمخروطي المستطيلات ABCDEFGH اذن

$$AG = \sqrt{DC^2 + AD^2 + AE^2} = \sqrt{6^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{61}$$

2) لتكن M النقطة من [AE] حيث $AM = 3$ و Δ المستقيم العمودي على المستوى (AED) في النقطة M .

ا) اذن ان Δ محتو في المستوى (AEF) .

3) ا) اذن ان Δ محتو في المستوى (AEF) .

0.5

اذن $(EF) \perp (AED)$ ولنا $\Delta \perp (AED)$ في M

$\left. \begin{array}{l} (EF) \perp (EA) \\ (EF) \perp (EH) \\ (EA) \subset (AED) \\ (EH) \subset (AED) \\ (EA) \cap (EH) = \{E\} \end{array} \right\}$ لنا:

ومنه $(EF) \parallel \Delta$ وبالتالي هما محتويان في مستوى واحد يمر من E و F و M اذن $\Delta \subset (MEF) = (AEF)$

ب) المستقيم Δ يقطع المستقيم (AF) في النقطة N . اذن $\frac{AM}{AE} = \frac{MN}{EF}$

في المثلث AEF لنا: $M \in (AE)$ و $N \in (AF)$ حيث $(MN) \parallel (EF)$.

0.75 حسب مبرهنة طاليس في المثلث فن: $\frac{AM}{AE} = \frac{MN}{EF} = \frac{AN}{AF}$ بالتالي $\frac{AM}{AE} = \frac{MN}{EF}$

ج) احسب MN ثم DN .

0.25

$$MN = \frac{3 \times 6}{4} = \frac{9}{2} = 4,5$$

لنا $\frac{3}{4} = \frac{MN}{6}$ اذن $\frac{AM}{AE} = \frac{MN}{EF}$ يعني

لنا DN تعامد DM حسب اولاً

المثلث ADM قائم ومقاييس الضلعين في A اذن $DM = \sqrt{2} \times AD = 3\sqrt{2}$

0.25

لنا: $\left. \begin{array}{l} (MN) \perp (AED) \\ (DM) \subset (AED) \end{array} \right\}$ ومنه $(MN) \perp (DM)$ في M

وبالتالي المثلث DMN قائم في M اذن حسب نظرية فيثاغورس:

$$DN^2 = DM^2 + MN^2 = (3\sqrt{2})^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 18 + \frac{81}{4} = \frac{153}{4}$$

0.25

$$DN = \sqrt{\frac{153}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{17} \quad \text{ومنه}$$

(3) أحسب حجم الهرم NMAD

لنا $\Delta \perp (AED)$ في M و N نقطة من Δ ، إذن $[NM]$ هو ارتفاع الهرم NMAD

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{AD \times AM}{2} \times NM \quad \text{وبالتالي حجمه هو}$$

0.5

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 3}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{27}{4} \text{ cm}^3$$

